Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Hartmann
Susanne Moritz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8./9./11.5.2006

Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 2

Gruppenübung

G 4 Es seien $P = (2, 0)$, $Q = (5, 4)$ sowie $R = (3, 3)$ drei Punkte und g die Gerade durch P und Q.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt R auf g?

c) Es sei h die Gerade senkrecht zu g durch den Punkt R. Geben Sie eine Parameterdarstellung von h an.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und h.

G 5 Es seien $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und $S = (4, -1, 2)$ vier Punkte und E die Ebene durch P, Q und R.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

b) Liegt der Koordinatenursprung in der Ebene E?

c) Es sei h die Gerade, welche senkrecht auf E steht und den Punkt S enthält. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebenen E mit der Geraden h.

G 6 Ein Dreieck ABC ist gegeben durch die drei Eckpunkte $A = (1, 2)$, $B = (3, 3)$ und $C = (4, 0)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels am Punkt A.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von ABC.

Hausübung

H 4 Gegeben seien die Punkte $P = (1, 1)$, $Q = (5, 2)$ und $S = (-3, 0)$. Sei g die Gerade durch die Punkte P und Q.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt S auf g?

c) Es sei h die Gerade senkrecht zu g durch den Punkt S. Geben Sie eine Parameterdarstellung von h an

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und h.

H 5 Gegeben seien die Punkte $P = (1, 1, 1)$, $Q = (-1, 2, 0)$ und $R = (0, 4, 3)$. Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q und R. Weiterhin sei F die Ebene, welche senkrecht auf E steht und die Punkte Q und R enthält.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

b) Liegt der Punkt $(2, 2, 3)$ in der Ebene E?

c) Geben Sie eine Parameterdarstellung von F an.

d) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen E und F.

H 6 Das Dreieck ABC ist gegeben durch die Punkte $A = (-1, 4)$, $B = (1, 1)$ und $C = (-2, \frac{5}{2})$. Weiterhin sei g die Gerade durch die Punkte B und C.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreieckes ABC.

b) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

c) Sei L der Schnittpunkt der Geraden g mit der Geraden h, welche senkrecht zu g ist und durch den Punkt A geht. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes L. Wie groß ist der Abstand von L zu A? Was ist die geometrische Interpretation dieses Abstandes?

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreickes ABC.

Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 2, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 Es seien $P = (2, 0)$, $Q = (5, 4)$ sowie $R = (3, 3)$ drei Punkte und g die Gerade durch P und Q.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt R auf g?

c) Es sei h die Gerade senkrecht zu g durch den Punkt R. Geben Sie eine Parameterdarstellung von h an.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und h.

a) *Eine Parameterdarstellung ist*

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\, \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

b) *Wir prüfen, ob das Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt. Aus der ersten Gleichung $3 = 2 + 3\lambda$ *folgt* $\lambda = \frac{1}{3}$, *aus der zweiten* $3 = 4\lambda$ *folgt* $\lambda = \frac{3}{4}$, *ein Widerspruch, also besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, und* R *liegt nicht auf* g.

c) *Ein Vektor, welcher senkrecht auf* $\vec{PQ}$ *steht ist der Vektor*

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dies ist ein Richtungsvektor der Geraden h. *Eine Parameterdarstellung von* h *lautet*

$$\vec{x} = \vec{OR} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) *Wir setzen die Parameterdarstellungen von* g *und* h *gleich und erhalten*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2 + 3\lambda &= 3 - 4\mu \\ 4\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}$$

mit den Unbekannten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Die Lösung dieses Gleichungssystemes ist* $\lambda = \frac{3}{5}$ *und* $\mu = -\frac{1}{5}$ *und der Schnittpunkt beider Geraden ist der Punkt* $(2, 0) + \frac{3}{5}(3, 4) = (\frac{19}{5}, \frac{12}{5})$.

G 5 Es seien $P = (1, 2, 2)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, 0)$ und $S = (4, -1, 2)$ vier Punkte und E die Ebene durch P, Q und R.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

b) Liegt der Koordinatenursprung in der Ebene E?

c) Es sei h die Gerade, welche senkrecht auf E steht und den Punkt S enthält. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden.

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Ebenen E mit der Geraden h.

a) *Eine Parameterdarstellung ist*

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\, \vec{PQ} + \mu\, \vec{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

b) *Wir überprüfen, ob das Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt. Aus der ersten Gleichung folgt $\mu = -\frac{1}{2}$, *aus der zweiten Gleichung folgt* $\lambda = 2$ *und eingesetzt in die dritte Gleichung* $0 = 2 - 2 + \frac{1}{2}$, *ein Widerspruch. Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, also liegt der Koordinatenursprung nicht auf* E.

c) *Der Richtungsvektor der Gerade* h *steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren der Ebene* E, *ergibt sich also aus dem Kreuzprodukt*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Parameterdarstellung von h *lautet daher*

$$\vec{x} = \vec{OS} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) *Wir setzen die Parameterdarstellungen von* h *und* E *gleich und erhalten*

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$. *Der Schnittpunkt ist dann* $(4, -1, 2) - (1, -2, 2) = (3, 1, 0)$, *also der Punkt* R.

G 6 Ein Dreieck ABC ist gegeben durch die drei Eckpunkte $A = (1, 2)$, $B = (3, 3)$ und $C = (4, 0)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels am Punkt A.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von ABC.

b) Es ist $a = |\vec{BC}| = |\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}| = \sqrt{10}$, $b = |\vec{AC}| = |\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}| = \sqrt{13}$ *und* $c = |\vec{AB}| = |\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}| = \sqrt{5}$.

c) Es ist

$$\cos\alpha = \frac{\langle\vec{AB}|\vec{AC}\rangle}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

und daraus $\alpha \approx 60,26$ *Grad.*

d) Der Flächeninhalt F *des Dreiecks berechnet sich über* $F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{7}{2} = 3,5$.

Hausübung

H 4 Gegeben seien die Punkte $P = (1,1)$, $Q = (5,2)$ und $S = (-3,0)$. Sei g die Gerade durch die Punkte P und Q.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt S auf g?

c) Es sei h die Gerade senkrecht zu g durch den Punkt S. Geben Sie eine Parameterdarstellung von h an

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und h.

a) *Eine Parameterdarstellung von g lautet*

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\, \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

b) *Ja, er liegt drauf, denn*

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *ist senkrecht zu* $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Eine Parameterdarstellung von h lautet also*

$$\vec{x} = \vec{OS} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

d) *Der Schnittpunkt muss der Punkt S sein, denn er liegt sowohl auf g als auch auf h.*

H 5 Gegeben seien die Punkte $P = (1,1,1)$, $Q = (-1,2,0)$ und $R = (0,4,3)$. Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q und R. Weiterhin sei F die Ebene, welche senkrecht auf E steht und die Punkte Q und R enthält.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

b) Liegt der Punkt $(2,2,3)$ in der Ebene E?

c) Geben Sie eine Parameterdarstellung von F an.

d) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen E und F.

a) *Eine Parameterdarstellung lautet*

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\vec{PQ} + \mu\vec{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

b) Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung $\lambda = -\frac{4}{5}$, $\mu = \frac{3}{5}$ *und somit liegt der* $(2, 2, 3)$ *in der Ebene* E.

c) Da die Ebene F *senkrecht auf* E *steht, steht einer der Richtungsvektoren von* F *senkrecht auf beiden Richtungsvektoren von* E. *Wir berechnen diesen Vektor mit dem Kreuzprodukt*

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Da die Punkte Q *und* R *in* F *liegen, ist*

$$\vec{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

der zweite Richtungsvektor der Ebene F. *Eine Parameterdarstellung von* F *lautet*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \, .$$

d) Da Q *und* R *beide sowohl in* E *als auch in* F *liegen, ist die Schnittgerade die Gerade durch* Q *und* R, *also*

$$\vec{x} = \vec{OQ} + \lambda \vec{QR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \, .$$

H 6 Das Dreieck ABC ist gegeben durch die Punkte $A = (-1, 4)$, $B = (1, 1)$ und $C = (-2, \frac{5}{2})$. Weiterhin sei g die Gerade durch die Punkte B und C.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreickes ABC.

b) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

c) Sei L der Schnittpunkt der Geraden g mit der Geraden h, welche senkrecht zu g ist und durch den Punkt A geht. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes L. Wie groß ist der Abstand von L zu A? Was ist die geometrische Interpretation dieses Abstandes?

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreickes ABC.

a) Es ist $a = |\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $b = |\vec{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ *und* $c = |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{13}$.

b) *Es ist*

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{AB} | \vec{AC} \rangle}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{5}{13}$$

und daraus $\alpha \approx 67,38$ *Grad.*
Es ist

$$\cos\beta = \frac{\langle \vec{BC} | \vec{BA} \rangle}{|\vec{BC}||\vec{BA}|} = \frac{\frac{21}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

und daraus $\beta \approx 29,74$ *Grad.*
Es ist

$$\cos\gamma = \frac{\langle \vec{CA} | \vec{CB} \rangle}{|\vec{CA}||\vec{CB}|} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

und daraus $\gamma = 82,87$ *Grad.*

c) *Eine Parameterdarstellung von* g *ist gegeben durch*

$$\vec{x} = \vec{OB} + \lambda\, \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3\lambda \\ 1+\frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

und die Hesse-Normalform von h *ist*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Wir setzen die Parameterdarstellung in die Hesse-Normalform von h *ein*

$$\frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2(1-3\lambda)+1+\frac{3}{2}\lambda).$$

Dies ergibt $\lambda = \frac{14}{15}$. *Diesen Wert setzen wir in die obige Parameterdarstellung ein*

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{14}{15} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

und erhalten somit die Koordinaten von $L = (-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.
Der Abstand von L *zu* A *ist gegeben durch*

$$|\vec{LA}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \right| = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

Geometrisch ist $\vec{LA}$ *die Höhe des Dreickes* ABC.

d) *Der Flächeninhalt des Dreiecks* ABC *ist gegeben durch*

$$F = \frac{1}{2}|\vec{LA}||\vec{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = 3$$