Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Hartmann
Susanne Moritz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

24./25./27.4.2006

Mathematik II für Chemiker und LaB, Übung 1

Gruppenübung

G 1 Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a) $z_1 = (1+2i)^{-1} \cdot \overline{(2+i)}$

b) $z_2 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} - (3e^{\frac{1}{4}\pi i})^2$

G 2 Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

a) $z^2 = -5 + 12i$

b) $z^2 - 6iz + 7 = 0$

G 3 Lösen Sie das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} z_1 + 2iz_2 &= 3 + i \\ iz_1 + 3z_2 &= 2 - i \end{aligned}$$

Hausübung

H 1 Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a) $z_1 = (1-i)^3 + \overline{(1-i)}$

b) $z_2 = (e^{\frac{1}{2}\pi i})^3 \cdot (2e^{-\frac{1}{4}\pi i})^2$

H 2 Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

a) $z^3 = -7i$

b) $z^2 + 4z = 2i - 4$

H 3 Lösen Sie das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} (3+2i)z_1 + 2z_2 &= i \\ iz_1 + (i+1)z_2 &= -1 \end{aligned}$$

Mathematik II für Chemiker und LaB
Übung 1, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a) $z_1 = (1+2i)^{-1} \cdot \overline{(2+i)}$

b) $z_2 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} - (3e^{\frac{1}{4}\pi i})^2$

a)

$$z_1 = (1+2i)^{-1}\overline{(2+i)} = \frac{1}{5}(1-2i)(2-i) = \frac{1}{5}(2-i-4i-2) = -i$$

also $Re(z_1) = 0$, $Im(z_1) = -1$, $|z_1| = 1$ *und* $\arg(z_1) = \frac{3}{2}\pi$

b)

$$z_2 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} - (3e^{\frac{1}{4}\pi i})^2 = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) - 9e^{\frac{1}{2}\pi i} = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - 9i = 2\sqrt{3} - 7i$$

also $Re(z_2) = 2\sqrt{3}$, $Im(z_2) = -7$, $|z_2| = \sqrt{61}$ *und* $arg(z_2) = \arctan\frac{-7}{2\sqrt{3}}$.

G 2 Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

a) $z^2 = -5 + 12i$

b) $z^2 - 6iz + 7 = 0$

a) Für $w = -5 + 12i$ *gilt* $|w| = 13$ *und* $\varphi = \arg(w) = \arctan\frac{12}{-5} + \pi$. *Die Gleichung* $z^2 = w$ *besitzt die beiden Lösungen* $z_{1,2} = \pm\sqrt{|w|}e^{i\frac{1}{2}\varphi} = \pm\sqrt{13}(\cos(\frac{1}{2}\varphi) + i\sin(\frac{1}{2}\varphi))$ *und ausgerechnet* $z_1 = 2 + 3i$ *und* $z_2 = -2 - 3i$.

b) Es ist $0 = z^2 - 6iz + 7 = (z-3i)^2 + 9 + 7 = (z-3i)^2 + 16$, *also* $z - 3i = \pm 4i$. *Die Lösungen lauten* $z_1 = 3i + 4i = 7i$ *sowie* $z_2 = 3i - 4i = -i$.

G 3 Lösen Sie das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} z_1 + 2iz_2 &= 3 + i \\ iz_1 + 3z_2 &= 2 - i \end{aligned}$$

Wir lösen $z_1 + 2iz_2 = 3 + i$ *nach* z_1 *auf, also* $z_1 = 3 + i - 2iz_2$, *setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten* $2 - i = i(3 + i - 2iz_2) + 3z_2 = 3i - 1 + 5z_2$ *und nach* z_2 *aufgelöst* $z_2 = \frac{1}{5}(3 - 4i)$ *und daraus* $z_1 = 3 + i - \frac{2}{5}i(3 - 4i) = \frac{1}{5}(7 - i)$.

Hausübung

H 1 Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a) $z_1 = (1-i)^3 + \overline{(1-i)}$

b) $z_2 = (e^{\frac{1}{2}\pi i})^3 \cdot (2e^{-\frac{1}{4}\pi i})^2$

a)

$$z_1 = (1-i)^3+\overline{(1-i)} = (1-2i+i^2)(1-i)+(1+i) = -2i(1-i)+1+i = -2i+2i^2+1+i = -1-i$$

also $Re(z_1) = -1$, $Im(z_1) = -1$, $|z_1| = \sqrt{2}$ *und* $\arg(z_1) = \pi + \arctan(1) = \frac{5}{4}\pi$

b)

$$z_2 = (e^{\frac{1}{2}\pi i})^3 \cdot (2e^{-\frac{1}{4}\pi i})^2 = e^{\frac{3}{2}\pi i} \cdot 4e^{-\frac{1}{2}\pi i} = 4e^{i\pi(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})} = 4e^{i\pi} = 4(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = -4$$

also $Re(z_2) = -4$, $Im(z_2) = 0$, $|z_2| = 4$ *und* $\arg(z_2) = \pi$.

H 2 Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie Ihr Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

a) $z^3 = -7i$

b) $z^2 + 4z = 2i - 4$

a) *Für* $w = -7i$ *ist* $|w| = 7$ *und* $\varphi = \arg(w) = \frac{3}{2}\pi$. *Die drei Lösungen der Gleichung* $z^3 = w$ *lauten* $z_k = \sqrt[3]{|w|}e^{i(\frac{\varphi}{3}+k\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{7}e^{i(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3})}$ *mit* $k = 0, 1, 2$. *Ausgerechnet ergibt dies* $z_0 = \sqrt[3]{7}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{7}i$, $z_1 = \sqrt[3]{7}e^{i\frac{7}{6}\pi} = \sqrt[3]{7}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})$ *und* $z_2 = \sqrt[3]{7}e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt[3]{7}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$.

b) *Wir rechnen*

$$0 = z^2 + 4z + -2i + 4 = (z+2)^2 - 4 - 2i + 4 = (z+2)^2 - 2i.$$

Also $(z+2)^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. *Somit*

$$z + 2 = \pm(1+i)$$

und die Lösungen sind $z_1 = -1 + i$ *und* $z_2 = -3 - i$.

H 3 Lösen Sie das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} (3+2i)z_1 + 2z_2 &= i \\ iz_1 + (i+1)z_2 &= -1 \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $(i-1)$ *und addiert das Ergebnis auf die erste Gleichung, so erhält man* $(3+2i)z_1 + i(i-1)z_1 = i - (i-1)$ *bzw.* $z_1(2+i) = 1$ *und umgestellt* $z_1 = \frac{1}{2+i} = \frac{1}{5}(2-i)$.
Man setzt dies in die zweite Gleichung ein $2z_2 = i-(3+2i)z_1 = i-\frac{1}{5}(3+2i)(2-i) = i - \frac{1}{5}(8+i) = \frac{1}{5}(4i-8)$ *und nach* z_2 *aufgelöst* $z_2 = \frac{2}{5}(i-2)$.