PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
27. Januar 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Übung

72. Zeigen Sie: Ein Banachraum X ist entweder von endlicher Dimension, oder jede (Hamel)-Basis in X ist überabzählbar.

73. Seien X, Y Banachräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist abgeschlossen.
b) Für einen linearen Operator $A : D(A) \to Y$ ist Graph (A) ein Unterraum von $X \times Y$.
c) A ist abgeschlossen $\iff$ Graph (A) ist abgeschlossen in $X \times Y$.
d) Sei $A : D(A) \to Y$ linear und abgeschlossen. Versehen mit der Graphnorm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ ist $D(A)$ ein Banachraum.
e) Der Operator $A : (D(A), \|\cdot\|_A) \to Y$ ist stetig.

Geben Sie Beispiele $A : D(A) \subset X \to Y$ linearer, stetiger aber nicht abgeschlossener Operatoren an.

74. Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subseteq X$ und $M' \subseteq X'$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) M ist beschränkt genau dann, wenn für jedes $\varphi \in X'$ die Menge $\{|\varphi(x)| : x \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
b) Ist X ein Banachraum, so ist M' genau dann in X' beschränkt, wenn die Menge $\{|\varphi(x)| : \varphi \in M'\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
c) Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$, $S : Y' \to X'$ linear, so dass
$$y'(Tx) = (Sy')(x) \quad \text{gilt für alle } x \in X \text{ und } y' \in Y'.$$
So sind T und S stetig.

75. Untersuchen Sie die folgenden Operatoren auf Abgeschlossenheit.

a) $X = C([0,1])$, $A_1 : D(A_1) \to C([0,1])$, $D(A_1) := C^1([0,1])$ und $A_1 f := f'$ für $f \in D(A_1)$;
b) $X = C([0,1])$, $A_2 : D(A_2) \to C([0,1])$, $D(A_1) := C^\infty([0,1])$ und $A_2 f := f'$ für $f \in D(A_2)$;
c) $X = L^2(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^2-Rand), $A_3 : D(A_3) \to C([0,1])$, $D(A_3) := H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ und $A_3 f := \Delta f$ für $f \in D(A_3)$;

76. Seien X, Y Banachräume und $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear, so dass
$$x \longmapsto a(x, y) \quad \text{für alle } y \in Y \text{ stetig ist, und}$$
$$y \longmapsto a(x, y) \quad \text{für alle } x \in X \text{ stetig ist.}$$
Beweisen Sie die Stetigkeit der Bilinearform a.

77. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nehmen wir an, dass für jedes $x > 0$ gilt $f(kx) \to 0$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

78. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit C^2-Rand. Betrachte das Neumann-Problem:
$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

a) Sei $f = 0$. Zeigen Sie mithilfe des Maximimprinzips, dass die klassichen Lösungen dieses Problems konstant sind.
b) Setze $M := \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$. Zeigen Sie: M ist konvex und abgeschlossen. (Ohne Beweis: M hat eine allgemeine Poincaré-Ungleichung.)
c) Nehmen an: $\int_\Omega f = 0$. Beweisen Sie, dass die Lösungen der Variationsgleichung (des Minimumproblems) genau die schwache Lösungen des Neumann-Problems sind. Die Lösungen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig.