PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
20. Januar 2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übung zu elliptischen Operatoren

69. Zeigen Sie, dass $|||u||| := \|\nabla u\|_{L^2} = \left(\int |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ auf $H_0^1(\Omega)$ eine zu $\|\cdot\|_{H_0^1}$ äquivalente Norm definiert. Sei $u_n \to u$ schwach konvergent in $H_0^1(\Omega)$. Beweisen Sie, dass $\|\nabla u\|_{L^2} \le \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2}$ gilt.

Im Folgenden sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit C^1-Rand, seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \le i, j \le d$ und $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \ge 0$ für $x \in \Omega$, und setze die Elliptizitätsbedingung voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$.

Die folgenden Aussagen können, ohne Beweis, verwendet werden.

i) **(Äußere Normale)** Es existiert eine stetige Funktion $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$, so dass für jedes $x \in \partial\Omega$ der Vektor $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_d(x))$ der äußere Normalvektor von $\partial\Omega$ in Punkt x ist, und ferner $|\nu(x)| = 1$ gilt.

ii) **(Randintegral)** Für ein $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist $\int_{\partial\Omega} f \,\mathrm{d}\sigma$ das Randintegral von f, wobei σ das "Oberfläche-Maß" bezeichnet, und somit definiert man den Banachraum $L^2(\partial\Omega)$, $\|f\|^2_{L^2(\partial\Omega)} := \int |f|^2 \,\mathrm{d}\sigma$.

iii) **(Gauß–Ostrogradsky-Theorem)** Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nu_i \,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

iv) **(Spuroperator)** Es gibt einen stetigen linearen Operator $S : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, so dass $Sg = g|_{\partial\Omega}$ für $g \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt, und $\ker S = H_0^1(\Omega)$; man schreibt oft $Sg = g|_{\partial\Omega}$.

70. Inhomogene Dirichlet–Randbedingung. Wir betrachten das Dirichlet-Problem mit inhomogener Randbedingung:

$$\text{(DP)} \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass es eine Funktion $g_0 \in H^1(\Omega)$ mit $g_0|_{\partial\Omega} = g$ gibt. Beweisen Sie, dass (DP) eine eindeutige schwache Lösung u hat, die die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\substack{g_1 \in H^1(\Omega)\\ g_1|_{\partial\Omega} = g}} \|g_1\|_{H^1(\Omega)}\Big)$$

mit einem $C > 0$ (unabhängig von f) erfüllt.

71. Neumann–Randbedingung. Wir untersuchen das folgende, so genannte Neumann-Problem:

$$\text{(NP)} \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \nu_i\Big(\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

a) Erfüllt die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (NP), so heißt u *klassische Lösung* von (NP). Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (NP), falls

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv \qquad \text{gilt für alle } v \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ (oder } v \in H^1(\Omega)).$$

Zeigen Sie: Jede klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung, und umgekehrt: eine schwache Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ist eine klassische Lösung.

b) Sei $f \in L^2(\Omega)$, und nehme an: $a_0(x) \ge \alpha_0 > 0$ für alle $x \in \Omega$. Beweisen Sie, dass eine eindeutige, schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ zu (NP) existiert. Ferner gibt es eine von f unabhängige Konstante C, so dass die Lösung u die Abschätzung $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ erfüllt.