PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
16. December 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Sobolev-Räumen

58. Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

i) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

ii) Es existiert $C_f > 0$

$$\Big| \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big| \leq C_f \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, \dots, d.$$

59. Für $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $x = (x', x_d)$ mit $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x_d \in \mathbb{R}$. Betrachte die Mengen

$$B := \{x = (x', x_d) : |x'| < 1,\ |x_d| < 1\}$$
$$B_+ := \{x = (x', x_d) : |x'| < 1,\ 0 < x_d < 1\}.$$

Sei $f \in C^1(B_+)$ mit Ableitung stetig auf $\overline{B_+}$. Für $(x', x_d) \in B$ definiere

$$\tilde{f}(x', x_d) := \begin{cases} f(x', x_d) & \text{falls } x_d > 0 \\ f(x', -x_d) & \text{falls } x_d \leq 0, \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x', x_d) := \begin{cases} f(x', x_d) & \text{falls } x_d > 0 \\ -3f(x', -x_d) + 4f(x', -\frac{x_d}{2}) & \text{falls } x_d \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f, g \in W^{1,p}(B)$ gilt, und bestimmen Sie die schwachen Ableitungen.

60.

a) Seien $\emptyset \neq \Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\Phi : \Omega' \to \Omega$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass für eine Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq \Omega'$ ist $\Phi(N) \subseteq \Omega$ auch eine Lebesgue-Nullmenge.

b) Seien $\emptyset \neq \Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen (Funktionalmatrizen) $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. Zeigen Sie, dass Φ und Φ^{-1} beide Lipschitz-stetig sind.

c) **Ketten-Regel:** Unter den Annahmen in b) beweisen Sie die folgende Aussage: Falls $f \in W^{1,p}(\Omega)$, dann liegt $f \circ \Phi$ in $W^{1,p}(\Omega')$ und

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \Phi) = \sum_{j=1} \tfrac{\partial}{\partial x_j} f \circ \Phi \cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i} \Phi_j,$$

wobei $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_d(x))$ mit Koordinatenfunktionen $\Phi_j : \Omega' \to \mathbb{R}$. *Hinweis: zunächst für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und dann Approximation!*

61. Sei $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 1)$ und $1 \leq p < \infty$. Die folgende Aussagen sind zu beweisen:

a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ für alle $r \in [p, \infty)$

b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

c) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. Setze

$$k := \big[m - \tfrac{d}{p}\big] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1.$$

Dann existiert eine Konstante C, so dass für jede $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{W^{m,p}} \qquad \text{für alle } |\alpha| \leq k$$
$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \qquad \text{für fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k.$$

Hausübungen

62. Sich gut erholen und Vorlesung sowie Übungen gegebenenfalls durcharbeiten.