PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
9. December 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Übung zu Sobolev-Räumen

52. Es seien $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $g \in W^{m,q}(\Omega)$. Beweisen Sie, dass $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ und

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f \cdot D^{\alpha-\beta} g \qquad \text{für } |\alpha| \le m \text{ gelten.}$$

53. Die folgenden Aussagen oder Fragen sind zu beweisen bzw. zu beantworten.

a) $[-1,1] \ni x \mapsto |x|$ liegt in $W^{1,1}((-1,1))$.

b) Die Charakteristische Funktion $f = \chi_{(-2,0]} : (-2,2) \to \mathbb{R}$ ist keine Sobolev-Funktion. Wie könnte die Ableitung f' (wenn es existierte) interpretiert werden?

c) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mit schwacher Ableitung g, $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, dann ist $f \equiv c$ fast überall für eine Konstante c. *Hiweis: Beweisen Sie, dass $f = c$ fast überall auf $\Omega_N := B(0,N)$, $N \in \mathbb{N}$ gilt. Man betrachte dazu einen Mollifier ρ_n und die Faltung $\rho_n * (f\chi_{\Omega_N})$.*

54. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$|||f||| := \max\{\|D^\alpha\ f|_p : \alpha \le m\}$$

eine zu $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ äquivalente Norm definiert.

55. Sei $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Zeigen Sie, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.

b) Sei $f \in W^{1,1}(I)$, mit f' die schwache Ableitung. Zeigen Sie, dass es eine Null-Menge $N \subset I$ existiert mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für alle } x, y \in I \setminus N. \tag{1}$$

Hinweis: Approximiere f aus $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$.

c) Sei $f \in W^{1,1}(I)$ und setze $h(y) := \int_a^y f'(z)\,\mathrm{d}z$. Zeigen Sie, dass h stetig (fortsetzbar) auf $[a,b] = \bar{I}$ ist und für ein $c \in \mathbb{R}$ $g + c = f$ fast überall gilt. Das heißt: wir können zu $f \in W^{1,1}(I)$ eine stetigte Funktion $J(f) \in C(\bar{I})$ zuordenen mit $J(f) = f$ fast überall. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$J : W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$$

(linear und) stetig ist. *Hinweis: Verwenden Sie hierzu* (1).

d) Beweisen Sie, dass für $1 < p \le \infty$ die Einbettung

$$J : W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$$

kompakt ist. *Hinweis: Verwenden Sie dazu* (1) *und die Hölder-Ungleichung.*

Hausübungen

56.

a) Es sei $\Omega := B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Geben sie Bedingung an $\alpha \in \mathbb{R}$ an, damit die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt.

b) Es sei $d \ge 3$ und $\Omega := B(0,1/e) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1/e\}$. Zeigen Sie, dass es eine "Funktion" aus $W^{1,2}(\Omega)$ gibt, die auf Ω nicht-stetig ist (genauer gesagt: die keine stetige Representante hat). Betrachte dazu Funktionen der Form

$$f(x) := \big(\log(1/|x|)\big)^s, \quad s \in (0,\infty).$$

57. Gegebenfalls Aufgabe 55.