TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übung zu L^p-Räumen

45.

a) Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $Tf := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T\| \leq \|g\|_1$. Bestimmen Sie den adjungierten Operator T'!

b) Sei $k \in L^2([0,1]^2)$ und für $f \in L^2([0,1])$ setze

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie zunächst, dass diese Definition überhaupt sinnvoll ist, und $T \in \mathscr{L}(L^2([0,1])$. Bestimmen Sie den adjungierten Operator T'.

46. Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, so gilt $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta}\|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Beweisen Sie diese Aussage

a) direkt, mit Verwendung der Hölder-Ungleichung,

b) und mit Verwendung des Riesz-Thorin-Satzes.

47. Für $h \in \mathbb{R}$ betrachte den Operator T_h definiert durch

$$(T_h f)(x) := f(x+h), \qquad f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}.$$

Zu beweisen ist $T_h \in \mathscr{L}(L^1)$ und die Stetigkeit der Funktion $\mathbb{R} \ni h \mapsto T_h f$ für $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dazu zeigen Sie erst die folgenden Aussagen:

a) $C_c(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R})$ (hierzu betrachten Sie einen Mollifier (ρ_n) und für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Folge $f * \rho_n$ für $n \to \infty$).

b) Ist $f \in C_c(\mathbb{R})$, so gilt $\|T_h f - f\|_\infty \to 0$ für $h \to 0$.

48. Beweisen Sie das Folgende: Für $1 < p < \infty$ sind L^p-Räume strikt konvex, d.h. für $f, g \in L^p(X,\mu)$ mit $\|f+g\|_p = 2$ und $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ gilt $f = g$. Was kann man im Falle $p = 1, \infty$ aussagen? *Hinweis: analisieren Sie den Beweis der Minkowski-Ungleichung und der Hölder-Ungleichung! Wann stehen dort "="?*

49. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p_i \leq \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \dots, m$. Sei ferner $1 \leq p \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Beweisen Sie, dass

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}} \quad \text{gelten.}$$

Hinweis: Mit vollständiger Induktion. Zunächst für $n = 2$. Dazu verwende die Hölder-Ungleichung.

Hausübungen

50. Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

a) $f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h)$,

b) $(f + \lambda g) * h = f * h + \lambda(g * h)$.

51. Für $h \in \mathbb{R}$ betrachte den Operator T_h definiert durch

$$(T_h f)(x) := f(x+h), \qquad f \in L^p(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Beweisen Sie, dass $T_h \in \mathscr{L}(L^p)$ und bestimmen Sie seinen adjungierten T_h'.