TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übung zu L^p-Räumen

36.

a) Betrachte $X = L^p((0,1))$ und $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \le p \le \infty$ liegt f in X?
b) Betrachte $L^p((0,1)^d)$ und $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \le p \le \infty$ liegt f in L^p?

37. Sei (M, Σ, μ) ein endlicher Maßraum ($\mu(M) < \infty$) und $1 \le r \le p \le \infty$. Beweisen Sie, dass $L^p(M,\mu) \subseteq L^r(M,\mu)$. Ferner gilt für $f \in L^\infty(M,\mu)$: $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

38. Sei μ =Zählmaß auf $\mathbb{N}$, d.h., $\mu(A)$ =Anzahl der Elemente in A. Zeigen Sie: $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mu)$.

39. Die folgende Aussagen sind zu beweisen.

a) Der Raum $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$, versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$, ist ein Banachraum.
b) Es gilt $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) \subseteq L^p(M,\mu)$.
c) Für jedes $f \in L^p(M,\mu)$ existiert $g \in L^1(M,\mu)$ und $h \in L^\infty(M,\mu)$, mit $f = g + h$.

40. Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$, und es gilt

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Hinweis: Hölder-Ungleichung!

41. Sei $g \in C([0,1]) = X$ und $\varphi \in C([0,1])'$ definiert durch

$$\varphi(f) := \int_{[0,1]} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

So ist ein stetiges lineares Funktional auf X definiert, das sich nach dem bekannten Satz als $\varphi(f) = \int f\,\mathrm{d}\mu_+ - \int f\,\mathrm{d}\mu_-$ schreiben lässt. Geben Sie, μ_+ und μ_- an.

42. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $f \in C(K)$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, dann gilt $\sup_{x\in K} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$ =wesentliche Supremum von f.

Hausübungen

43. Sei X ein Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\mathcal{N} := \ker p := \{x \in X : p(x) = 0\}$ ist ein Unterraum in X.
b) Für $[x] = x + \mathcal{N} \in X/\mathcal{N}$ setze $\|[x]\| := p(x)$. So ist $\|\cdot\|$ wohldefiniert und eine Norm auf dem Faktorraum $X/\mathcal{N}$.

44. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Beweisen Sie, dass

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_{L^p} \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}} \quad \text{gelten.}$$

Hinweis: Mit vollständiger Induktion. Zunächst für $n = 2$. Dazu verwende die Hölder-Ungleichung.