TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu linearen Funktionalen

30.

a) Betrachte den Banachraum c_0 und die Folge $\delta_n \in c_0$ ($\delta_n(k) = 1$, falls $n = k$, sonst 0). Zeigen Sie $\delta_n \xrightarrow{\sigma} 0$, und geben Sie eine Folge $y_n \in \operatorname{conv}\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$ an.

b) Definiere das Funktional $\psi((x_n)) := \lim_{n\to\infty} x_n$ auf c. Zeige $\psi \in c'$. Gibt es ein $(y_n) \in \ell^1$, so dass $\varphi_y = \psi$ (Erinnerung: $\varphi_y(x) = \sum_n x_n y_n$)? Beweisen Sie, dass jedes lineare Funktional $\varphi \in c'$ sich als $\lambda\psi + \varphi_y$ für ein $y \in \ell^1$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ schreiben lässt.

31.

a) Sei $a_n \in \mathbb{R}$ mit einer konvergenten Teilfolge $a_{n_k} \to a$. Beweisen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k \leq a \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$
Ist a_n konvergent, so steht hier überall "=".

b) Sei X ein Banachraum und $x_n \in X$ eine schwach konvergente Folge, $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Beweisen Sie die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm:
$$\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \|x_k\| =: \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

32. Sei X ein Banachraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $M \subseteq X$ schwach folgenabgeschlossen so auch abgeschlossen.
b) Ist $M \subseteq X$ kompakt so auch schwach folgenkompakt.
c) Ist $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen so auch schwach folgenabgeschlossen.

33.

a) Sei X reflexiver Banachraum und $F \subseteq X$ eine nicht leere, konvexe und abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ ein $y \in F$ mit
$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F) = \inf_{z\in F} \|x - z\|$$
existiert.

b) Sei X normierter Vektorraum, $x_n \in X$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass x_n genau dann gegen ein x konvergiert, wenn eine dichte Teilmenge $D \subseteq X'$ existiert, so dass für jedes $x' \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x)$.

Hausübungen

34.

a) Sei X separabler Banachraum. Beweisen Sie, dass eine Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \ldots \in X'$, $\|\varphi_n\| = 1$ existiert, so dass
$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \quad \text{für jedes } x \in X \text{ gilt.}$$
Hinweis: Sei $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ dicht in X. Wähle $\varphi_n \in X'$, $\|\varphi_n\| = 1$ mit $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$.

b) Zeigen Sie, dass jeder separabler Banachraum zu einem abgeschlossnen Unterraum von ℓ^∞ isometrisch isomorph ist. *Hinweis: verwende a): Sei $J : X \to \ell^\infty$, $J(x) = (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.*

35. Für X, Y Banachräume zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $(X \times_1 Y)' \simeq X' \times_\infty Y'$.
b) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)' \simeq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$.
c) $(X \times_1 Y)'' \simeq X'' \times_1 Y''$.