PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
11. November 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung zu kompakten Operatoren und linearen Funktionalen

24.

a) Sei $m \in \ell^\infty$, und $M : \ell^1 \to \ell^1$ sei definiert durch $M(x_n) = (m_n x_n)$. So ist M genau dann kompakt, wenn $m \in c_0$. Beweisen Sie dies.
b) Zeigen Sie die Existenz einer Folge $T_n \in \mathscr{L}(\ell^1)$ mit $\dim \operatorname{Bild} T_n < \infty$ und $\|T_n - M\| \to 0$.
c) Widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels die folgende Behauptung: Ist (T_n) eine Folge kompakter Operatoren auf einem Banachraum X und existiert $Tx := \lim T_n x$ für alle $x \in X$, so ist T kompakt.

25. Sei X ein normierter Vektorraum.

a) Sei $L \subseteq X$ abgeschlossen, $K \subseteq X$ kompakt. Man zeige, dass $L + K := \{x + y : x \in L, y \in K\}$ abgeschlossen ist. Ist L kompakt, dann folgt auch die Kompaktheit von $L + K$. Beweisen Sie dies.
b) Seien $U, V \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, dass $U + V$, $U - V$ auch offen sind.

26. Sei X normierter Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind A, B konvex so sind $A \cap B$, $\overline{A}$ und int A (das Innere von A) auch konvex; hier ist
$$\operatorname{int} A = \big\{x \in A : \exists r > 0 \text{ mit } B(x,r) \subseteq A\big\}.$$
Durchschnitt von beliebig vielen konvexen Mengen ist auch konvex.
b) In einem normierten Vektorraum ist die Einheitskugel B konvex, absorbierend und kreisförmig (d.h. $\lambda B \subseteq B$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \le 1$).
c) Sind $A, B \subseteq X$ konvex, so sind $A + B$, $A - B$ auch konvex.

27. Geben Sie zwei konvexe abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nicht strikt getrennt werden können. (Keine der Beiden kann kompakt sein!)

Hausübungen

28. Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt
$$\operatorname{conv}(A) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$
b) Wenn $x \in \operatorname{conv}(A)$, so kann x von A durch lineare Funktionale nicht getrennt werden, d.h. es gibt kein $\varphi \in X'$ mit
$$\varphi(x) < \varphi(y) \quad \forall y \in A.$$
c) Wenn $x \in \overline{\operatorname{conv}(A)}$, so kann x von A durch lineare Funktionale nicht strikt getrennt werden, d.h. es gibt kein $\varphi \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ mit
$$\varphi(x) < c < \varphi(y) \quad \forall y \in A.$$
d) Es gilt
$$\overline{\operatorname{conv}(A)} = \bigcap_{\substack{A \subseteq M \\ M \text{ konvex und} \\ \text{abgeschlossen}}} M$$

29. Ein normierter Vektorraum heißt strikt konvex, falls $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, und $\|x+y\| = 2$ die Gleichheit $x = y$ impliziert.

a) Man betrachte $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ und zeige, dass es für $p = 2$ strikt konvex ist, wobei für $p = 1, \infty$ nicht strikt konvex ist. Was ist die geometrische Bedeutung von strikt Konvexität?
b) Zeigen Sie, dass c_0, c, ℓ^∞, ℓ^1, $C([0,1])$ nicht strikt konvex sind.
c) Sei X' strikt konvex und $Y \subseteq X$ ein Unterraum, $\psi \in Y'$. Beweisen Sie, dass die Fortsetzung $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = \psi$ und $\|\varphi\| = \|\psi\|$ im Satz von Hahn-Banach eindeutig ist.