TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu linearen Operatoren

20.

a) Seien X, Y normierte Vektorräume und Y vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie: T hat eine eindeutige stetige Fortsetzung auf X.

b) Seien X, Y normierte Vektorräume und Y vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum. Ferner seien $T, T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ mit $\|T_n\| \leq M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: falls $T_n x \to Tx$ für alle $x \in D$, so gilt auch $T_n x \to Tx$ für alle $x \in X$.

c) Sei $c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n\}$. Sei $(m_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Folge und definiere den linearen Operator $M : c_{00} \to c_{00}$ durch $M(x_n) = (m_n x_n)$. Zeigen Sie, dass so ein linearer Operator definiert wird. Welche Bedingungen muss man an (m_n) stellen, damit M bezüglich der ℓ^p-Norm $(1 \leq p < \infty)$ beschränkt wird? Geben Sie die Fortsetzung von M auf ℓ^p an.

21. Es sei $X := \ell^p$, $1 \leq p < \infty$. Die Operatoren R, L seien definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots), \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Betrachte auch den Operator M aus Aufgabe c), und setze $T := ML$.

a) Zeigen Sie, dass R, L, M, T beschränkt sind und bestimmen Sie die jeweiligen Operatornormen.

b) Es gelte außerdem $|m_1| \geq |m_2| \geq \cdots$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Operatornormen von R^n, L^n, M^n, T^n.

c) Konvergieren L^n, R^n bzgl. Operatornorm oder stark (d.h. punktweise) für $n \to \infty$?

22.

a) Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $a_\alpha \in C(\bar{\Omega})$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Setze

$$Tf := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D_\alpha f \quad \text{für } f \in C^k(\bar{\Omega}).$$

Zeigen Sie, dass $T : C^k(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass der Identitätsoperator $I : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ kompakt ist.

c) Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig. Für $f \in C(I)$ definiere

$$(Sf)(x) := \int_0^x k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

Hausübungen

23. Wir definieren die Bernstein-Operatoren wie folgt:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1],\ f \in C([0,1]).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C([0,1])$ die Konvergenz $B_n f \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ $(n \to \infty)$ gilt.

24. Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix. Die Formel

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i \in \mathbb{N},\ x \in \ell^\infty$$

definiert genau dann einen stetigen, linearen Operator T auf $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, wenn

$$\sup_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$

Beweisen Sie diese Aussage.