PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
28. Oktober 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu Kompaktheit

13. Sei (X, d) metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
a) Ist X kompakt so auch vollständig.
b) Für eine kompakte Menge $K \subseteq X$ definiert $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K)$ eine stetige Funktion. Es gilt $x \in K$ genau dann, wenn $\operatorname{dist}(x, K) = 0$.
c) Für eine konvergente Folge $x_n \to x$ in X ist $\{x, x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kompakt.
d) **"Cantor-Lemma":** Eine Funktion $f : X \to X$ ist genau dann stetig wenn für jede konvergente Folge $x_n \to x$ existiert eine Teilfolge $x_{n_k} \to x$ mit $f(x_{n_k}) \to f(x)$.

14. Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass die Einheitskugel in ℓ^1 und c_0 nicht kompakt sind.

15. Sei $F \subseteq C^1([0, 1])$ eine beschränkte Menge. Zeigen Sie, dass F als Menge in $C([0, 1])$ relativ kompakt ist.

16. Beweisen Sie den Fixpunktsatz von Brouwer im Falle $d = 1$.

Hausübungen

17. Zeigen Sie, dass eine Menge $\mathcal{A} \subseteq c_0$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist und ferner die folgende Eigenschaft hat: für jede $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ und alle $a \in \mathcal{A}$ gilt $|a_n| \leq \varepsilon$.

18. Sei X ein normierter Vektorraum, $L \subseteq X$ abgeschlossen, $K \subseteq X$ kompakt. Man zeige, dass $L + K := \{x + y : x \in L, y \in K\}$ abgeschlossen ist. Ist L kompakt, dann folgt auch die Kompaktheit von $L + K$. Beweisen Sie dies.

19. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig*, falls für jede konvergente Folge $x_n \in X$, $x_n \to x$, gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

a) Zeigen Sie, dass eine unterhalbstetige Funktion auf jeder kompakten Menge eine Minimalstelle hat.
b) Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von stetigen Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass

$$g(x) := \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$$

eine unterhalbstetige Funktion ist.