PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
21. Oktober 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Banachräumen

6. Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte Vektorräume und $1 \leq p \leq \infty$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \Big(\|x\|^p + |||y|||^p\Big)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|, |||y|||\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$ definiert. Das Paar $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ wird mit $X \times_p Y$ bezeichnet.

b) Beweisen Sie: Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ sind alle äquivalent auf $X \times Y$.

c) Sind X, Y vollständig, so folgt auch die Vollständigkeit von $X \times_p Y$.

d) Das Produkt ist genau dann separabel, wenn X und Y separabel sind.

7. Zeigen Sie, dass $C^1([0,1])$ versehen mit $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ zu einem abgeschlossenen Unterraum con $C[0,1] \times_1 C[0,1]$ isometrisch isomorph ist. Ist $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum? Welchen der folgenden Normen auf $C^1([0,1])$ sind zu $\|\cdot\|_{C^1}$ äquivalent:

$$|||f|||_1 := |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

$$|||f|||_2 := \max\Big\{\Big|\int_0^1 f\Big|, \|f'\|_\infty\Big\},$$

$$|||f|||_3 := \Big(\int_0^1 |f|^2 + \int_0^1 |f'|^2\Big)^{1/2}.$$

(Beweisen Sie auch, dass diese Funktionen in der Tat Normen sind.)

8. Zeigen Sie, dass c, c_0, ℓ^p mit $1 \leq p < \infty$ alle separabel sind.

9. Sei X normierter Vektorraum. Äquivalent sind:

a) X ist separabel.

b) $B(0,1) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ist separabel.

c) $S(0,1) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ ist separabel.

Hinweis: a) ⇒ c) ist etwas komplizierter. Zeigen Sie zunächst: für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann $S(0,1)$ durch abzählbar vielen Kugeln mit Radius $1/n$ überdeckt werden.

Hausübungen

10.

a) Sei X Vektorraum und $E \subseteq X$ ein Unterraum. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation: $x \sim y$, falls $x - y \in E$. Sei X/E die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$. Zeigen Sie, dass X/E versehen mit den Operationen

$$\hat{x} + \hat{y} := \widehat{x+y} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \hat{x} := \widehat{\lambda x}$$

ein Vekrtorraum ist.

b) Sei X normierter Vektorraum und E abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie, dass $|||\cdot||| := \operatorname{dist}(\cdot, E)$ wohldefiniert und eine Norm auf X/E ist.

c) Es sei $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $E := \{f \in C([a,b]) : f(s) = 0 \text{ für alle } s \in [\alpha,\beta]\}$. Beweisen Sie: E ist ein abgeschlossener Unterraum von $C([a,b])$ und der Quotient $C([a,b])/E$ ist isometrisch isomorph zu $C([\alpha,\beta])$.

11. Sei $X = C([0,1] \times [0,1])$ und betrachte die lineare Hülle

$$E := \operatorname{lin}\{h = f \cdot g : h(x,y) = f(x)g(y) \text{ für ein } f, g \in C([0,1])\} \subseteq X.$$

Zeigen Sie, dass E ein dichter Unterraum in X ist. Ist X separabel?