TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Banachräumen

1.

a) Für $1 \leq p < \infty$ und $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ setze

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq d} |x_i|.$$

i) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ Banachräume sind.
ii) Skizzieren Sie für $d = 1, 2$ und $p = 1, 2, \infty$ die Einheitskugeln $B_p = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \leq 1\}$.
iii) Zeigen Sie: $\|x\|_p = \lim_{r\to p} \|x\|_r$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$.
iv) Beweisen Sie, dass in einem normierten Vektorraum die Einheitskugel B eine konvexe Menge ist (d.h., wenn zwei Punkte x, y in B liegen, so gehört die Verbindungslinie zwischen x, y auch zu B).

2.

a) Zeigen Sie: $\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq c_0 \subsetneq \ell^\infty$ für $1 < p < \infty$. Es gelten aber nicht:

$$\bigcup_{1\leq p<\infty} \ell^p = c_0, \qquad \bigcap_{1<p\leq\infty} \ell^p = \ell^1.$$

b) Beweisen Sie: Ist $x \in \ell^1$ so gilt $\|x\|_1 = \lim_{p\to 1} \|x\|_p$. Falls $x \in \ell^p$ für ein $1 \leq p < \infty$, so gilt $\|x\|_\infty = \lim_{r\to\infty} \|x\|_r$.
c) Zeigen Sie: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.
d) Ergänzen Sie den Beweis aus der Vorlesung für die Vollständigkeit des ℓ^1-Raums.
e) Beweisen Sie die Vollständigkeit von ℓ^p!

3. Zwei normierte Vektorräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ heißen *isometrisch isomorph* $(X \simeq Y)$, falls ein linearer (algebraischer) Isomorphismus J zwischen X und Y existiert, welcher auch eine Isometrie ist: $|||Jx||| = \|x\|$. Zeigen Sie: X ist vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.

Hausübungen

4. Für $a < b$ sei $X := C^1([a, b]) := \{f \in C([a, b]) : f \text{ stetig differenzierbar in } [a, b]\}$. Für $f \in X$ sei

$$p_1(f) := \sup\{|f(s)| : s \in [a, b]\}$$
$$p_2(f) := \sup\{|f'(s)| : s \in [a, b]\}$$
$$p_3(f) := |f(a)| + \sup\{|f'(s)| : s \in [a, b]\}$$

Zeigen Sie:
a) p_1 ist eine Norm auf X; p_2 ist keine Norm auf X.
b) (X, p_1) ist kein Banachraum.
c) (X, p_3) ist ein Banachraum.

5. Es sei $X := C([a, b])$ für $a < b$ und $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtnegative Funktion. Wir setzen

$$p_\omega(f) := \sup\{\omega(s)|f(s)| : s \in [a, b]\}.$$

a) Welche Bedingungen muss man an ω (genauer an $\omega^{-1}(0)$) stellen, damit p_ω eine Norm ist?
b) Es existiere $\varepsilon > 0$ so, dass $\omega(s) \geq \varepsilon$ für alle $s \in [a, b]$. Dann ist (X, p_ω) ein Banachraum.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zusatzübungen

Z.1. Sei $\mathrm{Lip}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz-stetig}\}$. Für $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ sei

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \tfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ ein Banachraum ist.

Z.2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

für $0 < p < 1$ und $d \geq 2$ keine Norm ist! Skizzieren Sie die "Einheitskugel" für $d = 2$! Was passiert für $p \to 0$? Dazu beweisen Sie: für $0 < p < 1$ und $a, b > 0$ gilt $(a+b)^p < a^p + b^p$. *Hinweis: es reicht* $(1+x)^p \leq 1 + x^p$ *zu zeigen.*