



13. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) d(x, y)$$

in Abhängigkeit von R . Der Integrationsbereich ist dabei die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt $(0, 0)$:

$$B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Berechnen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R$.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation (Polarkoordinaten)

$$g : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt:

$$J_g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Daher folgt

$$\det J_g(r, \varphi) = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r.$$

Mit der Transformationsformel ergibt sich

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r \, d\varphi dr = 2\pi \int_0^R \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r \, dr = 2\pi \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right]_0^R \\ &= 2\pi \left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 2\pi$.

Aufgabe G2

Der Membranmantel eines Kühlturms K lässt sich als Rotationskörper darstellen. Dabei wird das Hyperbelstück

$$x^2 - z^2 = 1, \quad -1 \leq z \leq 1$$

um die z -Achse gedreht. Stellen Sie die Menge K in kartesischen Koordinaten dar und berechnen Sie dann das Volumen mit Hilfe einer geeigneten Transformation.

Lösung: Es gilt:

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Mit Zylinderkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \int_K dx = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r \, dr dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (1+z^2) dz d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\varphi = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

Aufgabe G3

Sei $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Begründen Sie zunächst, wieso E ein Normalbereich ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Transformation (verallgemeinerte Polarkoordinaten)

$$g : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar \cos(\varphi) \\ br \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir definieren

$$E_1 = [-a, a],$$

$$e_2(x_1) = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)}.$$

Dann gilt:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in B_1, |x_2| \leq e_2(x_1)\},$$

also ist E ein Normalbereich. Daher existiert das Integral nach Satz der Vorlesung. Weiterhin gilt:

$$J_g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) & -ar \sin(\varphi) \\ b \sin(\varphi) & br \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det J_g(r, \varphi) = abr \cos^2(\varphi) + abr \sin^2(\varphi) = abr.$$

Mit der Transformationsformel ergibt sich damit:

$$\int_E d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr \, d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 abr \, dr = 2\pi \left[\frac{abr^2}{2} \right]_0^1 = \pi ab.$$

Hinweise zur Vordiplomprüfung

1. In der Vordiplomprüfung wird der Stoff bis einschließlich

Kap. VIII, §3 Transformationsformel

- geprüft.
2. Zur Vordiplomprüfung sind **keine** Hilfsmittel zugelassen (gleiche Regelung wie bei den Scheinklausuren).
3. Es ist geplant, 1-2 Wochen vor der Vordiplomprüfung Sprechstunden anzubieten. Die genauen Termine werden rechtzeitig auf unserer Webseite bekanntgegeben.