Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
13.7.2006

12. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $r \in [-1, 1)$. Durch die Menge

$$K_r = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \, x_3 \leq r\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K_r.

Lösung: Wie in der Vorlesung definieren wir

$$\begin{aligned} B_{1r} &= [-1, r], \\ b_2(x_1) &= \sqrt{1 - x_1^2}, \quad x_1 \in B_1 \\ B_2 &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in B_{1r}, |x_2| \leq b_2(x_1)\right\} \\ b_3(x_1, x_2) &= \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in B_2, \end{aligned}$$

Dann gilt

$$B_r = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in B_2, |x_3| \leq b_3(x_1, x_2)\right\}.$$

Also ist B_r ein Normalbereich. Damit gilt

$$\mathrm{Vol}(B_r) = \int_{-1}^{r} \pi(1 - x_1^2) \, dx_1 = \pi \left[x_1 - \frac{1}{3}x_1^3\right]_{-1}^{r} = \pi \left(r(1 - \frac{1}{3}r^2) + \frac{2}{3}\right).$$

Aufgabe G2

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \exp(x+2y), \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \end{aligned}$$

und die Mengen

$$\begin{aligned} M &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}, \\ N &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f|_M$ und $f|_N$. Begründen sie dabei zuerst, weshalb globale Minima bzw. Maxima für beide Probleme existieren.

Lösung: Da f stetig ist und M und N kompakt sind, existieren globale Minima/globale Maxima nach Satz der Vorlesung. Wir bestimmen diese zunächst für $f|_M$. Wegen

$$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x \;\; 2y)^T = 0$$

gdw. $x = y = 0$ und $(0,0) \notin M$, darf der Satz über Lagrange-Multiplikatoren angewendet werden. Als Kandidaten erhalten wir die Lösungen von

$$L_x = \exp(x+2y) + 2x\lambda \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$

$$L_y = 2\exp(x+2y) + 2y\lambda \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Hier existiert keine Lösung, da $\exp(x+2y) > 0$.
Fall 2: $\lambda \neq 0$. Es gilt

$$2L_x - L_y = 2\lambda(2x - y) = 0,$$

d.h. $x = \frac{y}{2}$. Einsetzen in die 3. Gleichung liefert die Lösungen $(x_1,y_1) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ und $(x_2,y_2) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$. Wegen $f(x_1,y_1) = \exp(10/\sqrt{5})$ und $f(x_2,y_2) = \exp(-10/\sqrt{5})$, wird das globale Maximum bei (x_1,y_1) und das globale Minimum bei (x_2,y_2) angenommen.

Wir bestimmen zunächst die lokalen Extrema von $f|_N$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\exp(x+2y) \;\; 2\exp(x+2y))^T \stackrel{!}{=} 0.$$

Offensichtlich gibt es keine Lösungen zu diesen Gleichungen. Daher erhalten wir wie oben, dass das globale Maximum bei (x_1,y_1) und das globale Minimum bei (x_2,y_2) angenommen wird.

Aufgabe G3

Es sei durch

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x_1 \le 3,\ \ 1 \le x_2 \le 2,\ \ -1 \le x_3 \le 1\}$$

und die Dichtefunktion

$$\rho : Q \to \mathbb{R}, \quad \rho(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)$$

ein inhomogener Quader gegeben. Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M := \int\limits_Q \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3)$$

sowie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$, gegeben durch

$$S_i := \frac{1}{M} \int\limits_Q x_i \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, \ldots, 3,$$

des Quaders. Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale existieren.

Hinweis: $\frac{d}{dz}\left((z + 1) \exp(-z)\right) = -z \exp(-z)$.

Lösung: Da alle Integranden stetig sind und Q ein Quader, d.h. insbesondere ein Normalbereich, existieren alle Integrale nach Satz der Vorlesung.

$$\begin{aligned}
M &= \int\limits_1^3 \int\limits_1^2 \int\limits_{-1}^1 x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)\ dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int\limits_1^3 \int\limits_1^2 \left[-x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)\right]_{-1}^1\ dx_2 dx_1 \\
&= \int\limits_1^3 \int\limits_1^2 x_2(x_1 - 2)^2 (\exp(1) - (\exp(-1))\ dx_2 dx_1 \\
&= \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{2} x_2^2 (x_1 - 2)^2 (\exp(1) - (\exp(-1))\right]_1^2\ dx_1 \\
&= \int\limits_1^3 \frac{3}{2} (x_1 - 2)^2 (\exp(1) - (\exp(-1))\ dx_1 \\
&= \left[\frac{1}{2} (x_1 - 2)^3 (\exp(1) - (\exp(-1))\right]_1^3 = \exp(1) - (\exp(-1)
\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \frac{1}{M}\int_1^3 x_1(x_1-2)^2\,dx_1 \int_1^2 x_2\,dx_2 \int_{-1}^1 \exp(-x_3)\,dx_3 \\
=& \frac{1}{M}\left[\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{4}{3}x_1^3 + 2x_1^2\right]_1^3 \left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_1^2 [-\exp(-x_3)]_{-1}^1 = 2 \\
S_2 =& \frac{1}{M}\int_1^3 (x_1-2)^2\,dx_1 \int_1^2 x_2^2\,dx_2 \int_{-1}^1 \exp(-x_3)\,dx_3 \\
=& \frac{1}{M}\left[\frac{1}{3}(x_1-2)^3\right]_1^3 \left[\frac{1}{3}x_2^3\right]_1^2 [-\exp(-x_3)]_{-1}^1 = \frac{14}{9} \\
S_3 =& \frac{1}{M}\int_1^3 (x_1-2)^2\,dx_1 \int_1^2 x_2\,dx_2 \int_{-1}^1 x_3\exp(-x_3)\,dx_3 \\
=& \frac{1}{M}\left[\frac{1}{3}(x_1-2)^3\right]_1^3 \left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_1^2 [-(x_3+1)\exp(-x_3)]_{-1}^1 = \frac{-\exp(-1)}{\exp(1)-(\exp(-1)}
\end{aligned}
$$

Hausübung

Freiwillige Abgabe

Aufgabe H1

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in[0,2]^2, z = xy^2+y^3\right\}$$

und oberhalb des Quadrats

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in[0,2]^2, z = 0\right\}$$

liegt.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(K) &= \int_0^2\int_0^2\int_0^{xy^2+y3} dzdydx = \int_0^2\int_0^2 xy^2+y^3\,dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{4}y^4\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^2 \frac{8}{3}x+4\,dx = \left[\frac{4}{3}x^2+4x\right]_0^2 = \frac{16}{3}+8 = \frac{40}{3}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe H2

Es sei B der Bereich im ersten Quadranten zwischen den Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$. Skizzieren Sie B und berechnen Sie

$$\int_B \sqrt{x}y \; d(x,y).$$

Lösung:

$$\int_B \sqrt{x}y \; d(x,y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}y \; dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1} 2\sqrt{x}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \; dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}} \; dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{11}x^{\frac{11}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{11} = \frac{6}{55}.$$