Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006
6.7.2006

11. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Lagrange-Funktion die Extremalwerte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = xy,$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Ist diese Aufgabe auch mit den Methoden aus dem ersten Semester lösbar? Geben Sie gegebenfalls die Vorgehensweise an.

Lösung: Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0, \ -(x^2 + 2y^2 - 1) \leq 0\}$ ist nach Vorlesung abgeschlossen und wegen

$$\|(x, y)\|^2 \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 - 1 + 1 = 1$$

beschränkt, d.h. M ist kompakt. Da f stetig ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum.
Es gilt $(\text{grad } g)(x, y) = (2x \quad 4y) = (0 \quad 0)$ nur für $(x, y) = (0, 0)$. Da $(0, 0)$ nicht der Nebendingung genügt, kann der Satz aus der Vorlesung angewendet werden. Die Lagrange-Funktion lautet $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$. Damit erhält man

$$L_x(x, y, \lambda) = y + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0, \tag{1}$$

$$L_y(x, y, \lambda) = x + 4\lambda y \stackrel{!}{=} 0, \tag{2}$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0. \tag{3}$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Aus $\lambda = 0$ folgt $x = y = 0$ im Widerspruch zur Gleichung (3).

Fall 2: $\lambda \neq 0$. Aus Gleichung 1 ergibt sich $y = -2\lambda x$, Gleichung 2 ergibt $y = -\frac{1}{4\lambda}x$. Also erhält man $\lambda^2 = \frac{1}{8}$ (d.h. $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$) und $y^2 = \frac{1}{2}x^2$. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $2x^2 = 1$.

Somit ergeben sich folgende Kandidaten für die lokalen Extrema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & y_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & y_2 &= -\frac{1}{2}, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & y_3 &= \frac{1}{2}, \\ x_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & y_4 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = f(x_4, y_4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Damit sind (x_1, y_1) und (x_4, y_4) die Maximalstellen, (x_2, y_2) und (x_3, y_3) die Minimalstellen.
Diese Aufgabe kann auch mit den Methoden aus dem ersten Semester gelöst werden. Hierzu löst man die Nebenbedingung nach x oder y auf und setzt das Ergebnis in f ein. Allerdings muss in diesem Fall eine Fallunterscheidung durchgeführt werden (Beachte: $x = \pm\sqrt{1 - 2y^2}$). Im Allgemeinen lässt sich allerdings die Nebenbedingung weder nach x noch nach y auflösen.

Aufgabe G2

Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\right\}, \\ G_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen G_1 und G_2.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{G_1} y(1 - x)\, d(x, y), \qquad \int_{G_2} y(1 - x)\, d(x, y).$$

Lösung: Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{G_1} y(1 - x)\, d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - x) y\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)\, dx = \left[-\frac{1}{4}(1 - x)^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Da y eine ungerade Funktion ist, gilt $\int_{-1}^{1} y\,dy = 0$, d.h.

$$\int_{G_2} y(1-x)\,d(x,y) = 0.$$

Aufgabe G3

Bestimmen Sie drei positive Zahlen, deren Summe gleich 90 und deren Quadratsumme minimal ist. Interpretieren Sie das Problem zunächst geometrisch, berechnen Sie dann ein lokales Extremum mit Hilfe einer geeigneten Lagrange-Funktion und begründen Sie dann geometrisch, wieso das gefundene lokale Extremum ein Minimum ist.

Lösung: Setze $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x+y+z-90$. Wegen $(\operatorname{grad} g)(x,y,z) = (1\ \ 1\ \ 1) \neq (0\ \ 0\ \ 0)$, kann der Satz aus der Vorlesung angewendet werden. Die Lagrange-Funktion lautet hier $L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z-90), \lambda \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
L_x(x,y,z,\lambda) &= 2x+\lambda \overset{!}{=} 0,\\
L_y(x,y,z,\lambda) &= 2y+\lambda \overset{!}{=} 0,\\
L_z(x,y,z,\lambda) &= 2z+\lambda \overset{!}{=} 0,\\
L_\lambda(x,y,z,\lambda) &= x+y+z-90 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen erhält man $x=y=z$, somit folgt mit der vierten Gleichung $x=y=z=30$ und $x^2+y^2+z^2 = 2700$.

Geometrische Interpretation:

Die Menge $M = \{x,y,z \geq 0 : x+y+z = 90\}$ ist der Bereich der Ebene

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = 30\sqrt{3} \right\},$$

der im ersten Oktanten liegt.

Da weiterhin $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ der euklidische Abstand vom Nullpunkt ist, wird in diesem Minimierungsproblem der Punkt aus M mit minimalem Abstand zum Nullpunkt gesucht.

Also ist der gesuchte Punkt der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die durch den Nullpunkt verläuft und den Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor besitzt.

(Dies ist auch die einfachste Möglichkeit zu verifizieren, dass die mit dem Lagrange-Ansatz gefundene Lösung $(30, 30, 30)$ minimal ist!)

Hausübung

Aufgabe H1

Betrachten Sie zylindrische Dosen. Es bezeichne r den Radius einer Dose und h die Höhe. Die Oberfläche O beträgt dann $O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und das Volumen $V(r, h) = \pi r^2 h$. Berechnen Sie die minimale Oberfläche einer Dose mit Hilfe einer Lagrange-Funktion bei einem Dosenvolumen von 1000 Volumeneinheiten.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die gefunden Stelle das gesuchte Minimum ist.

Lösung: Wegen $(\operatorname{grad} g)(r, h) = (2\pi rh \quad \pi r^2) \neq (0 \quad 0)$ für $r \neq 0$, darf der Satz aus der Vorlesung angewendet werden (Beachte: $r = 0$ und h beliebig erfüllt die Nebenbedingung nicht). Lagrange-Funktion: $L(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$.
Ableitungen:

$$\begin{aligned}
L_r(r, h, \lambda) &= 4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi rh \stackrel{!}{=} 0, \\
L_h(r, h, \lambda) &= 2\pi r + \lambda\pi r^2 \stackrel{!}{=} 0, \\
L_\lambda(r, h, \lambda) &= \pi r^2 h - 1000 \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Umformen der zweiten Gleichung ergibt $\pi r(2+\lambda r) = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $r = 0$ und $r = -2/\lambda$. Die Lösung $r = 0$ ist nicht zulässig. Also erhält man mit $\lambda = -2/r$ das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
4\pi r - 2\pi h &= 0, \\
\pi r^2 h - 1000 &= 0.
\end{aligned}$$

Somit $r_* = 10/\sqrt[3]{2\pi}$, $h_* = 20/\sqrt[3]{2\pi}$ und $O_* = 6\pi r_*^2 \approx 553.58$.

Aufgabe H2

(a) Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y \leq 5\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(2\pi x)e^{3y}.$$

i. Skizzieren Sie Q und entscheiden Sie, ob $\int_Q f(x, y)d(x, y)$ existiert.
ii. Prüfen Sie, ob die iterierten Integrale

$$\int_1^2 [\int_3^5 f(x, y)\, dy]\, dx \quad \text{und} \quad \int_3^5 [\int_1^2 f(x, y)\, dx]\, dy$$

übereinstimmen.

(b) Sei $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le \pi\}$. Berechnen Sie

$$\int_G (x^3 y \cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy \sin(z))\, d(x,y,z).$$

Lösung:

(a) i. Die Menge Q ist ein Quader, f ist stetig auf Q, also existiert das Integral.

ii. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left[\int_3^5 \cos(2\pi x)e^{3y}\, dy\right] dx &= \int_1^2 \cos(2\pi x) \left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_{y=3}^{y=5} dx \\
&= \frac{1}{3}(e^{15} - e^9) \int_1^2 \cos(2\pi x)\, dx \\
&= \frac{1}{3}(e^{15} - e^9) \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_{x=1}^{x=2} = 0
\end{aligned}$$

und

$$\int_3^5 \left[\int_1^2 \cos(2\pi x)e^{3y}\, dx\right] dy = \int_3^5 e^{3y} \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_{x=1}^{x=2} dy = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\int_G (x^3 y \cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy \sin(z))\, d(x,y,z) \\
&= \int_1^4 \int_{-1}^2 \int_0^\pi (x^3 y \cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy \sin(z))\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_1^4 \int_{-1}^2 \left[x^3 y \sin(z) - 3e^x y^2 z - 2xy\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\pi} dy\, dx \\
&= \int_1^4 \int_{-1}^2 -3\pi e^x y^2 + 4xy\, dy\, dx \\
&= \int_1^4 \left[-\pi e^x y^3 + 2xy^2\right]_{y=-1}^{y=2} dx \\
&= \int_1^4 -9\pi e^x + 6x\, dx \\
&= \left[-9\pi e^x + 3x^2\right]_{x=1}^{x=4} = -9\pi(e^4 - e) + 45.
\end{aligned}$$

Raumeinteilung zur Klausur am 8. Juli 2006 von 13-15 Uhr

Nr.	Übungsleiter	Raum
1	Nicole Dienstl	S311/08
2	Abdelhamid Ayat	S311/08
3	Walter Reußwig	S306/051
4	Marion Jähne	S103/221
5	Matthias Geißert/Horst Heck	S311/0012
6	Matthias Geißert/Horst Heck	S311/0012

Bitte finden Sie sich pünktlich in dem für Sie angegebenen Raum ein und bringen Sie ihren Studienausweis und ein Lichtbildausweis mit.