Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
29.6.2006

10. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xyz \\ -xyz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle der folgenden Ausdrücke, die Sinn machen: $(\text{grad } f)(x, y, z)$, $J_f(x, y, z)$, $H_f(x, y, z)$, $(\text{grad } g)(x, y)$, $J_g(x, y)$, $H_g(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von g.

(c) Ist die Frage nach lokalen Extrema von f sinnvoll? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir erhalten:

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ -yz & -xz & -xy \end{pmatrix}$$

$$J_g(x, y) = \left((\text{grad } g)\right)^T (x, y) = (3x^2 - 3y \;\; 3y^2 - 3x), \quad H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

grad f und H_f existieren nicht.

(b) Wir bestimmen die kritischen Stellen mittels $(\text{grad } g)(x, y) \stackrel{!}{=} (0 \;\; 0)^T$ und erhalten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ als kritische Stellen. Die Eigenwerte von $H_g(0, 0)$ sind ± 3. Da sowohl positive als auch negative Eigenwerte auftreten, liegt in $(0, 0)$ kein Extremwert vor. Die Matrix $H_g(1, 1)$ besitzt die Eigenwerte 3 und 9. Daher ist sie positiv definit und es liegt in $(1, 1)$ ein lokales Minimum vor.

(c) Bei f ist die Frage nach Extremwerten nicht sinnvoll, da $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und Werte in $\mathbb{R}^2$ nicht vergleichbar sind.

Aufgabe G2

Geben Sie jeweils eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, die

(a) nicht abgeschlossen und nicht beschränkt,

(b) kompakt,

(c) unbeschränkt und abgeschlossen,

(d) beschränkt und nicht abgeschlossen,

ist.

Lösung:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ y < 7\}$,

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{3}{2},\ y = 0\}$,

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$,

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y \leq 1\}$.

Aufgabe G3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 1$. Berechnen Sie die Richtungsableitung in $(0, 0)$ mit dem Differenzenquotienten, d.h.

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0, 0))}{t}.$$

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 1$. Gilt $\partial_v f(0, 0) = \langle \text{grad } f(0, 0), v\rangle$?

(c) Wieso darf die Formel aus dem Skript nicht angewendet werden?

Hinweis: Schreiben Sie v in der Form $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Lösung:

(a) Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ sei $v = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t \cos^2(\varphi) \sin(\varphi)}{t} = \cos^2(\varphi) \sin(\varphi).$$

(b) Offensichtlich gilt $\langle \operatorname{grad} f(0,0), v\rangle = 0$ (vgl. Übungsblatt 9, G1). Insbesondere gilt $\partial_v f(0,0) = \langle \operatorname{grad} f(0,0), v\rangle$ i. A. nicht.

(c) Die Voraussetzung „stetig partiell differenzierbar“ ist hier nicht erfüllt (vgl. Übungsblatt 9, G1).

Hausübung

Aufgabe H1

Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - y^3, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad h(x) = f\left(g(x)\right).$$

(a) Geben Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} an.
Stimmen f_{xy} und f_{yx} überein?

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h mit der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie $h'(x)$ direkt.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{gathered} f_x(x,y) = -2x + 2y,\ f_y(x,y) = 2x - 3y^2, \\ f_{xx}(x,y) = -2,\ f_{xy}(x,y) = 2 = f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y) = -6y \end{gathered}$$

Die gemischten partiellen Ableitungen sind nach dem Satz von Schwartz gleich.

(b) Mit der Kettenregel erhält man:

$$\begin{aligned} h'(x) = J_f(g(x))J_g(x) &= \begin{pmatrix} -2\cos(x) + 2\sin(x) & 2\cos(x) - 3\sin^2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ &= 2(\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x) + \cos^2(x)) - 3\cos(x)\sin^2(x). \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$h(x) = -\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) - \sin^3(x).$$

Daraus ergibt sich $h'(x)$ wie in (b).

Aufgabe H2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x + y + 1.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema.

Lösung: Es gilt:

$$f_x(x,y) = 2x + y + 1,\ f_y(x,y) = x + 2y + 1,$$
$$f_{xx}(x,y) = f_{yy} = 2,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1.$$

Der Punkt $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ist der einzige kritische Punkt. Die Eigenwerte von $H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ sind 1 und 3, d.h. $H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ist positiv definit. Daher liegt ein Minimum in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ vor.

Raumeinteilung zur Klausur am 8. Juli 2006 von 13-15 Uhr

Nr.	Übungsleiter	Raum
1	Nicole Dienstl	S311/08
2	Abdelhamid Ayat	S311/08
3	Walter Reußwig	S306/051
4	Marion Jähne	S103/221
5	Matthias Geißert/Horst Heck	S311/0012
6	Matthias Geißert/Horst Heck	S311/0012

Bitte finden Sie sich pünktlich in dem für Sie angegebenen Raum ein und bringen Sie ihren Studienausweis und ein Lichtbildausweis mit.