Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
22.6.2006

9. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist (Differenzenquotient!). Was ist der Gradient von f in $(0,0)$?

(b) In welchen Punkten ist f stetig partiell differenzierbar?

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f in allen Punkten, in denen sie existiert.

(d) Was können Sie über den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und Stetigkeit aussagen?

Lösung:

(a)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Also, (grad f)$(0,0) = (0,0)$.

(b) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt die Behauptung aus Mathematik I. Es gilt:

$$(\text{grad f})(x,y) = \left(2\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

Sei $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f_x(x_n, y_n) = -2\frac{1/n^4}{(\frac{2}{n^2})^2} = -\frac{1}{2} \neq f_x(0,0),$$

d.h. f_x ist in $(0,0)$ nicht stetig. Mit $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$ sieht man, dass f_y in $(0,0)$ nicht stetig ist.

(c) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erhält man:

$$f_{xx}(x,y) = -2\frac{y^3(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{yy}(x,y) = -2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$f_{xy}(x,y) = 2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = f_{yx}$$

Also

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\frac{y^3(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & 2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ 2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & -2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

Wie in (a) ergibt sich $f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$. $f_{yx}(0,0)$ existiert nicht. Daher existiert die Hesse-Matrix in $(0,0)$ nicht.

(d) Es besteht kein Zusammenhang zwischen Stetigkeit und partieller Integrierbarkeit (Beachte: f_x ist in $(0,0)$ nicht stetig,aber partiell differenzierbar.

Aufgabe G2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 - y$.

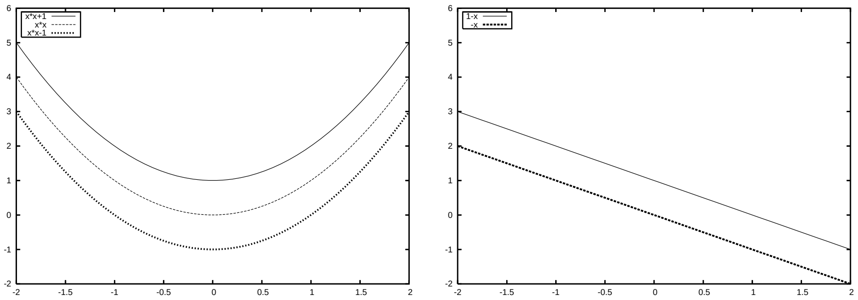
(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Schnitte des Funktionsgraphen für $x = -1, 0, 1$, bzw. $y = -1, 0, 1$, d.h. die Graphen der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $y \mapsto f(-1,y)$, $y \mapsto f(0,y)$ und $y \mapsto f(1,y)$ bzw. $x \mapsto f(x,-1)$, $x \mapsto f(x,0)$ und $x \mapsto f(x,1)$.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumengen von f zu den Niveaus -2, -1, 0, 1 und 2.

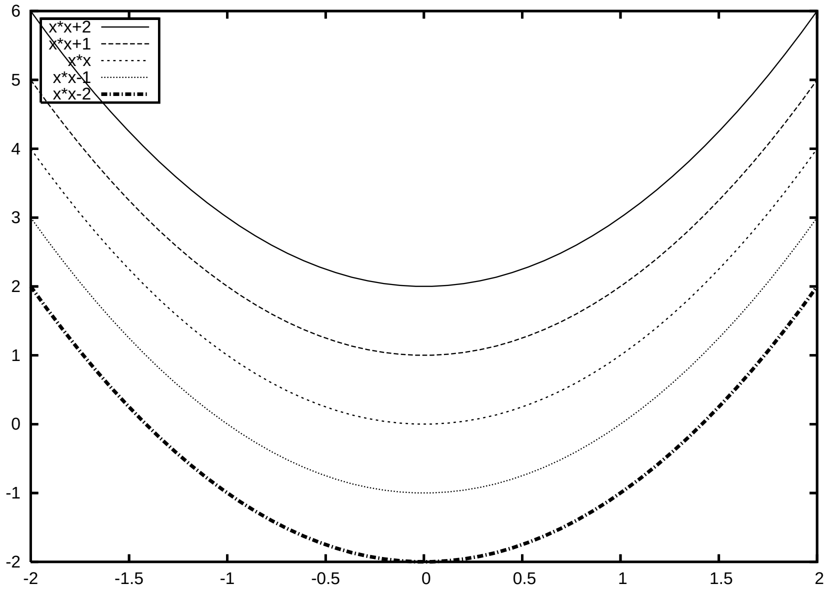
(c) Skizzieren Sie ein 3-dimensionales Bild des Graphen.

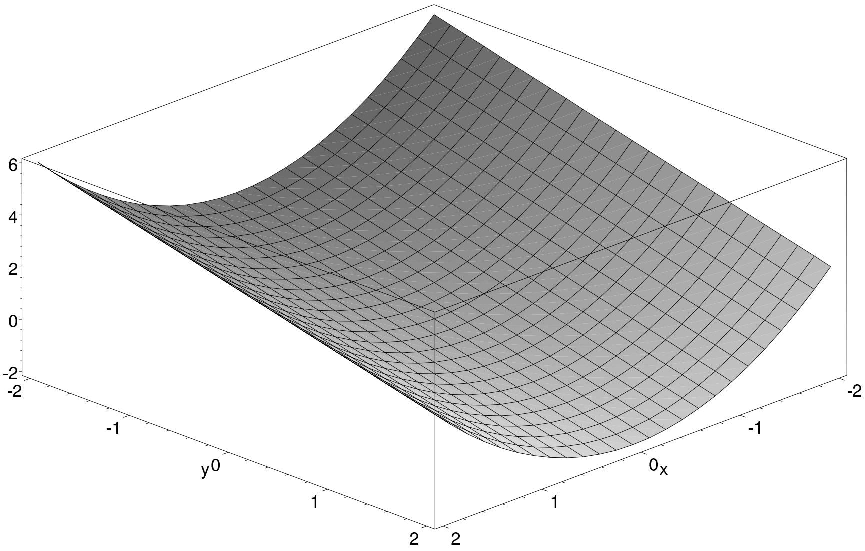
Lösung:

(a)



(b)





(c)

Aufgabe G3

Die Funktion $u: \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$u(t,x,y) = (4\pi t)^{-1} \exp\left[-(x^2+y^2)/4t\right].$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$$

gilt, indem Sie die auftretenden partiellen Ableitungen berechnen.

Bemerkung: Eine Funktion $u: \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die obige Gleichung erfüllt, heißt Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*. Mit dieser *partiellen Differentialgleichung* lässt sich die zeitliche Entwicklung einer zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Temperaturverteilung beschreiben.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
u_t(t,x,y) &= -\frac{1}{4\pi t^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}) + \frac{1}{16\pi t^3}(x^2+y^2)\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}),\\
u_{xx}(t,x,y) &= -\frac{1}{8\pi t^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}) + \frac{1}{16\pi t^3}x^2\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}),\\
u_{yy}(t,x,y) &= -\frac{1}{8\pi t^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}) + \frac{1}{16\pi t^3}y^2\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}).
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Funktion $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den drei Komponentenfunktionen

$$\begin{aligned} H_1(x_1,x_2,x_3) &= \cosh(x_1^2+x_2^2-x_3), \\ H_2(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt{\exp(x_1x_2)}, \\ H_3(x_1,x_2,x_3) &= x_3, \end{aligned}$$

also $H(x_1,x_2,x_3) = (H_1(x_1,x_2,x_3), H_2(x_1,x_2,x_3), H_3(x_1,x_2,x_3))$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der Komponenten H_1, H_2, H_3.

(b) Geben Sie die Funktionalmatrix $J_H(x_1,x_2,x_3)$ an.

(c) Berechnen Sie $\det J_H(0,1,1)$.

Lösung:

(a)
$$\begin{array}{ll} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 2x_1\sinh(x_1^2+x_2^2-x_3), & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 2x_2\sinh(x_1^2+x_2^2-x_3) \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = -\sinh(x_1^2+x_2^2-x_3), & \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = (x_2/2)\sqrt{\exp(x_1x_2)} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_2} = (x_1/2)\sqrt{\exp(x_1x_2)}, & \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 1 \end{array}$$

(b)
$$J_H(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1\sinh(x_1^2+x_2^2-x_3) & 2x_2\sinh(x_1^2+x_2^2-x_3) & -\sinh(x_1^2+x_2^2-x_3) \\ (x_2/2)\sqrt{\exp(x_1x_2)} & (x_1/2)\sqrt{\exp(x_1x_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\det J_H(0,1,1) = 0$.

Aufgabe H2

Zeigen Sie, dass

$$f : [-2,2]^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \sqrt{12381}\,\frac{37x^2\sin\sqrt{|y|}}{(42-z)^2},$$

ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt.

Lösung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $[-2,2]^3$ kompakt ist. Da f als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist, existiert ein globales Minimum und Maximum nach Satz der Vorlesung.