Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
15.6.2006

8. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die passenden Graphen bzw. Höhenlinien zu folgenden Funktionen.

Lösung:

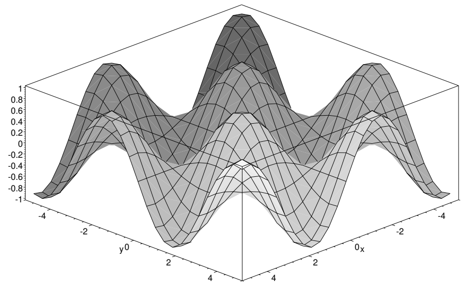

Abbildung 1: $\sin(x) \cdot \sin(y)$

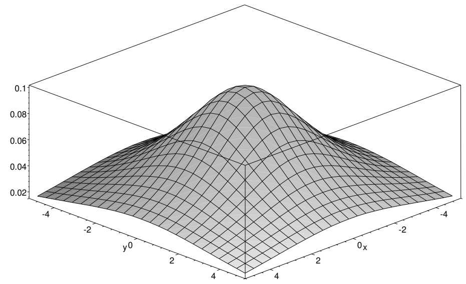

Abbildung 2: $\dfrac{1}{x^2 + y^2 + 10}$

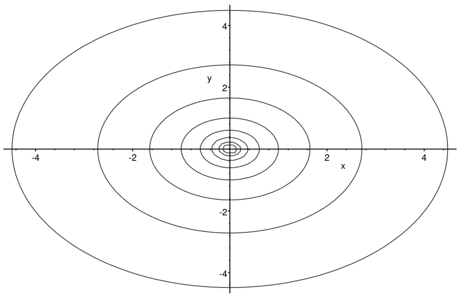

Abbildung 3: $\log(x^2 + y^2)$

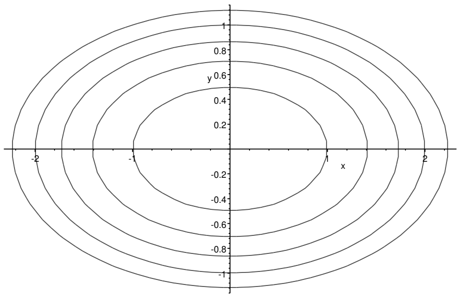

Abbildung 4: $x^2 + 4y^2$

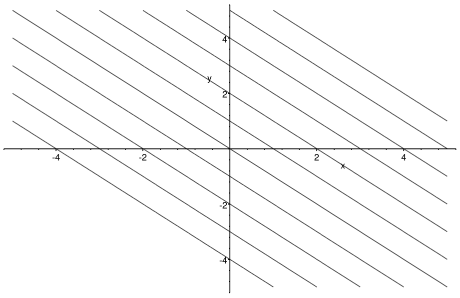

Abbildung 5: $x + y - 1$

Aufgabe G2

Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n := (n \;\; \frac{1}{n})^T \quad b_n := (\frac{1}{n^2} \;\; \frac{n}{1+n})^T \quad c_n := (\frac{1}{n^2} \;\; \frac{1}{n^2})^T \quad d_n := \big(\sin\big(\frac{n\pi}{4}\big) \;\; \cos\big(\frac{n\pi}{4}\big)\big)^T, \quad n \geq 1.$$

(a) Skizzieren Sie diese Folgen. Welche dieser Folgen sind beschränkt?

(b) Welche sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(c) Geben Sie zwei weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

(a) Wir benutzen, dass eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann beschränkt ist, wenn jede Komponente beschränkt ist (s. Vorlesung). Mit Mathematik I erhalten wir:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt,
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt,
$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt,
$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) Wir benutzen, dass eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann konvergiert, wenn jede Komponente konvergiert (s. Vorlesung). Mit Mathematik I erhalten wir:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht,
$\lim_{n\to\infty} b_n = (0 \;\; 1)^T$,

$\lim_{n\to\infty} c_n = (0 \ \ 0)^T$,
$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

(c) Beispiele für Nullfolgen sind:
$e_n = (\frac{1}{n^3} \ \ \frac{3}{n})^T$, $f_n = (\frac{4}{n} \ \ \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}})^T$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G3

Es seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \quad \text{und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y \le 1\} \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Welche dieser Mengen sind abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt? Begründen Sie dabei Ihre Aussagen!

(c) Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird die Menge

$$\overline{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{Es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x.\right\}$$

als *Abschluss* von M bezeichnet. Bestimmen Sie den Abschluss von A, B und C. Was wäre hier genau zu zeigen?

Lösung:

(a)

(b) A ist beschränkt, da für $x \in A$ gilt: $\|x\|^2 \le 1$.
Behauptung: A ist abgeschlossen.
Beweis Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Nach Vorlesung gilt:

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k\| \le \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \tag{1}$$

d.h. $x \in A$.
Da A abgeschlossen und beschränkt ist, ist A kompakt.

B ist nicht beschränkt, da $(b_n^1)_{n\in\mathbb{N}} = (n \ \ 2)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ nicht beschränkt ist.
B ist nicht abgeschlossen, da für $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (0 \ \ 1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ gilt: $\lim_{n\to\infty} b_n^2 = (0 \ \ 1) \notin B$.
Da B nicht abgeschlossen ist, ist B auch nicht kompakt.

C ist beschränkt, da

$$\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2, \quad (x,y) \in C.$$

C ist nicht abgeschlossen, da für $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2n} \ \ \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ gilt: $\lim_{n\to\infty} c_n = (0 \ \ 0) \notin C$.
Da C nicht abgeschlossen ist, ist C nicht kompakt.

(c) A ist bereits abgeschlossen, d.h. $\overline{A} = A$.

$$\begin{aligned}\overline{B} =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}.\\ \overline{C} =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.\end{aligned}$$

Zu Zeigen wären zwei Dinge:
1) Für jeden Punkt $x \in \overline{M}$ existiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine beliebige konvergente Folge. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{M}$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es seien

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche dieser Matrizen sind symmetrisch, positiv definit, negativ definit, bzw. orthogonal?

(b) Was weiß man damit jeweils über die Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte der jeweiligen Matrix?

(c) Bestimme eine ONB des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von C.

Hinweis: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit wenn $-A$ negativ definit ist (vgl. Definition).

Lösung:

(a) Man erkennt leicht, dass A nicht symmetrisch und B, C und D symmetrisch sind.

Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda + \frac{2}{3}).$$

Daraus folgt, dass 0 ein Eigenwert von A ist. Insbesondere ist A weder positiv noch negativ definit (s. Vorlesung). Wegen $\det A = p_A(0) = 0 \neq \pm 1$ ist A nicht orthogonal (s. Vorlesung).

Das charakteristische Polynom von B lautet:

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Da ± 1 Eigenwerte von B sind, ist B weder positiv noch negativ definit. B ist orthogonal, da

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{und} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bilden.
ACHTUNG: $\det B = p_b(0) = 1$ reicht NICHT.

Wegen $\det C = 8$ und $\det 3 = 3$ folgt mit der Vorlesung, dass C positiv definit ist. Insbesondere ist C nicht negativ definit und auch nicht orthogonal (wegen $\det C \neq \pm 1$).

Das charakteristische Polynom von D lautet:

$$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1).$$

D ist weder positiv noch negativ definit, da 0 ein Eigenwert von D ist. Aus dem gleichen Grund ist D nicht orthogonal.

(b) Da B, C, D symmetrisch sind, sind sie diagonalisierbar.

Da C positiv definit ist, folgt $\sigma(C) \subseteq]0, \infty[$, insbesondere ist C invertierbar.

Da B orthogonal ist, ist B invertierbar.

ACHTUNG: Aus symmetrisch folgt NICHT invertierbar.

Aufgabe H2

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie verschiedene Nullfolgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie die Folgen $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Lösung: Wähle $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ und $b_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = (0,0)$, aber

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = -\frac{1}{2}.$$

Daher ist f in $(0,0)$ nicht stetig. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Aufgabe H3

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E = \{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 mit $E = \{\lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Hinweis: Dies ist eine Bonus-Aufgabe.

Lösung: Wir wählen $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren ergibt sich:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
z_2 &= < v_2, e_1 > e_1 = e_1 \\
v_2 - z_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
e_2 &= \frac{1}{\|v_2 - z_2\|}(v_2 - z_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
z_3 &= < v_3, e_1 > e_1 + < v_3, e_2 > e_2 = 0 e_1 + e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 \\
v_3 - z_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
e_3 &= \frac{1}{\|v_3 - z_3\|}(v_3 - z_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$