



8. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die passenden Graphen bzw. Höhenlinien zu folgenden Funktionen.

Lösung:

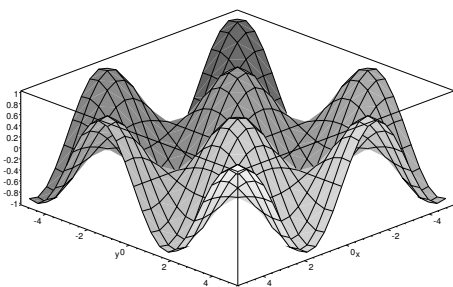


Abbildung 1: $\sin(x) \cdot \sin(y)$

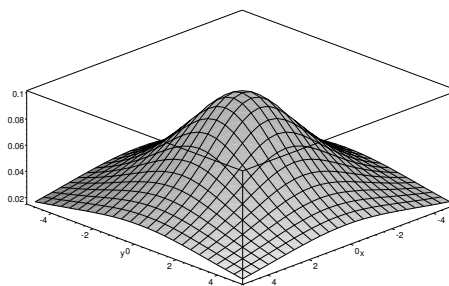
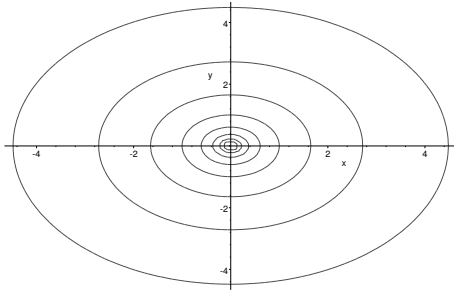
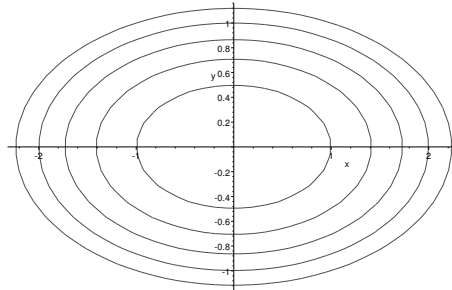
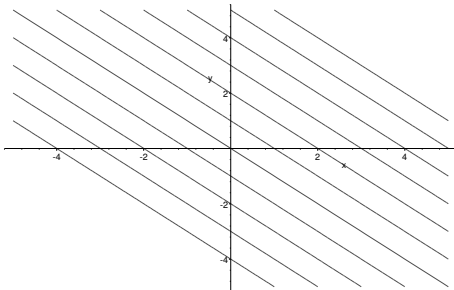


Abbildung 2: $\frac{1}{x^2 + y^2 + 10}$

Abbildung 3: $\log(x^2 + y^2)$ Abbildung 4: $x^2 + 4y^2$ Abbildung 5: $x + y - 1$ **Aufgabe G2**

Wir betrachten die folgenden Folgen in \mathbb{R}^2 :

$$a_n := \left(n \frac{1}{n}\right)^T \quad b_n := \left(\frac{1}{n^2} \quad \frac{n}{1+n}\right)^T \quad c_n := \left(\frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n^2}\right)^T \quad d_n := \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^T, \quad n \geq 1.$$

- Skizzieren Sie diese Folgen. Welche dieser Folgen sind beschränkt?
- Welche sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?
- Geben Sie zwei weitere Nullfolgen in \mathbb{R}^2 an.

Lösung:

- Wir benutzen, dass eine Folge in \mathbb{R}^n genau dann beschränkt ist, wenn jede Komponente beschränkt ist (s. Vorlesung). Mit Mathematik I erhalten wir:
 - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt,
 - $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt,
 - $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt,
 - $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.
- Wir benutzen, dass eine Folge in \mathbb{R}^n genau dann konvergiert, wenn jede Komponente konvergiert (s. Vorlesung). Mit Mathematik I erhalten wir:
 - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = (0 \ 1)^T$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = (0 \ 0)^T,$$

$$(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht.}$$

(c) Beispiele für Nullfolgen sind:

$$e_n = \left(\frac{1}{n^3} \ \frac{3}{n}\right)^T, \quad f_n = \left(\frac{4}{n} \ \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)^T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe G3

Es seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \quad \text{und} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\} \end{aligned}$$

gegeben.

- (a) Skizzieren Sie die Mengen.
 (b) Welche dieser Mengen sind abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt? Begründen Sie dabei Ihre Aussagen!
 (c) Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird die Menge

$$\overline{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{Es existiert eine Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x. \right\}$$

als *Abschluss* von M bezeichnet. Bestimmen Sie den Abschluss von A , B und C . Was wäre hier genau zu zeigen?

Lösung:

- (a)
 (b) A ist beschränkt, da für $x \in A$ gilt: $\|x\|^2 \leq 1$.

Behauptung: A ist abgeschlossen.

Beweis Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x . Nach Vorlesung gilt:

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad (1)$$

d.h. $x \in A$.

Da A abgeschlossen und beschränkt ist, ist A kompakt.

B ist nicht beschränkt, da $(b_n^1)_{n \in \mathbb{N}} = (n-2)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ nicht beschränkt ist.

B ist nicht abgeschlossen, da für $(b_n^2)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = (0, 1) \notin B$.

Da B nicht abgeschlossen ist, ist B auch nicht kompakt.

C ist beschränkt, da

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2, \quad (x, y) \in C.$$

C ist nicht abgeschlossen, da für $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2n} \quad \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = (0 \ 0) \notin C$.

Da C nicht abgeschlossen ist, ist C nicht kompakt.

(c) A ist bereits abgeschlossen, d.h. $\bar{A} = A$.

$$\bar{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}.$$

$$\bar{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Zu Zeigen wären zwei Dinge:

1) Für jeden Punkt $x \in \bar{M}$ existiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine beliebige konvergente Folge. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{M}$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es seien

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Welche dieser Matrizen sind symmetrisch, positiv definit, negativ definit, bzw. orthogonal?
- Was weiß man damit jeweils über die Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte der jeweiligen Matrix?
- Bestimme eine ONB des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren von C .

Hinweis: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit wenn $-A$ negativ definit ist (vgl. Definition).

Lösung:

- (a) Man erkennt leicht, dass
- A
- nicht symmetrisch und
- B, C
- und
- D
- symmetrisch sind.

Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2\left(\lambda + \frac{2}{3}\right).$$

Daraus folgt, dass 0 ein Eigenwert von A ist. Insbesondere ist A weder positiv noch negativ definit (s. Vorlesung). Wegen $\det A = p_A(0) = 0 \neq \pm 1$ ist A nicht orthogonal (s. Vorlesung).

Das charakteristische Polynom von B lautet:

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Da ± 1 Eigenwerte von B sind, ist B weder positiv noch negativ definit. B ist orthogonal, da

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine ONB des \mathbb{R}^3 bilden.

ACHTUNG: $\det B = p_b(0) = 1$ reicht NICHT.

Wegen $\det C = 8$ und $\det 3 = 3$ folgt mit der Vorlesung, dass C positiv definit ist. Insbesondere ist C nicht negativ definit und auch nicht orthogonal (wegen $\det C \neq \pm 1$).

Das charakteristische Polynom von D lautet:

$$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1).$$

D ist weder positiv noch negativ definit, da 0 ein Eigenwert von D ist. Aus dem gleichen Grund ist D nicht orthogonal.

- (b) Da
- B, C, D
- symmetrisch sind, sind sie diagonalisierbar.

Da C positiv definit ist, folgt $\sigma(C) \subseteq]0, \infty[$, insbesondere ist C invertierbar.

Da B orthogonal ist, ist B invertierbar.

ACHTUNG: Aus symmetrisch folgt NICHT invertierbar.

Aufgabe H2

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie verschiedene Nullfolgen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^2 und untersuchen Sie die Folgen $(f(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Lösung: Wähle $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ und $b_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = (0, 0)$, aber

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -\frac{1}{2}.$$

Daher ist f in $(0, 0)$ nicht stetig. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Aufgabe H3

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E = \{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 mit $E = \{\lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Hinweis: Dies ist eine Bonus-Aufgabe.

Lösung: Wir wählen $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist v_1, v_2, v_3 eine Basis des \mathbb{R}^3 . Mit dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren ergibt sich:

$$e_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = e_1$$

$$v_2 - z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{\|v_2 - z_2\|} (v_2 - z_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = \langle v_3, e_1 \rangle e_1 + \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = 0e_1 + e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

$$v_3 - z_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3 - z_3\|} (v_3 - z_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$