Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
8.6.2006

7. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden linearen Abbildungen. (Machen Sie sich zuvor die geometrische Bedeutung von Eigenwerten klar.)

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f_1 beschreibt die Spiegelung an der Geraden $G = \mathbf{Lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_2 beschreibt die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn mit Drehachse $\mathbf{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_3 beschreibt die orthogonale Projektion auf die x_1-Achse.

Lösung:

(a) Die Vektoren $v_1 = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Die Vektoren $v_2 = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (diese Vektoren stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$) sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ (Spiegelung). Da v_1, v_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, gibt es keine weiteren Eigenvektoren/Eigenwerte.

(b) Die Vektoren $v_1 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Aufgrund der Drehung wird kein anderer Vektor auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet.

(c) Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $f_3 e_1 = e_1$, d.h. $\lambda_1 = 1$ ist ein Eigenwert zu den Eigenvektoren $v_1 = \mu e_1$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Desweiteren gilt $f_3 e_j = 0$, $j = 1, 2$. Daher sind $v_2 = \mu e_2 + \nu e_3$, $\mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Weitere Eigenwerte/Eigenvektoren kann es nicht geben, da e_1, e_2, e_3 bereits eine Basis bilden.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt:

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3),$$

also $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3)$. Daher sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte der Matrix A

Aufgabe G3

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so dass $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\det(A - \lambda E) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2$, also $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(1 - \lambda)^2$.

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1, 2$. Zu beachten ist noch, dass der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist. Man berechnet

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix ist nicht diagonalähnlich. Eine Transformationsmatrix T mit den gewünschten Eigenschaften kann nicht gebildet werden. (Nur 2 Eigenvektoren vorhanden, 3 wären aber nötig.)

Hausübung

Aufgabe H1

Bestimmen Sie reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch ist und die Eigenwerte 0, -2 und 2 besitzt. Wie lauten zugehörige Eigenvektoren?

Lösung: Damit die Matrix symmetrisch ist, muss $b = a$ sein. Weiterhin

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2a-\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{pmatrix} &= (-\lambda) \cdot \big((2a-\lambda)(-\lambda) - a^2\big) - 2 \cdot (2(-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 2a\lambda^2 + (4+a^2)\lambda \\ &= (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2a\lambda - (4+a^2)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{2a^2+4}$. Also ist $a = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

(a) für $\lambda_1 = 0$, $v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) für $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

(c) für $\lambda_3 = -2$, $v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H2

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so dass $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\cdot((-1-\lambda)(2-\lambda)+2(2-\lambda)) + 2\cdot(-3(2-\lambda)+3(2-\lambda)) \\ &= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).\end{aligned}$$

Also ist $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: In diesem Fall ist $(A+E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$v_1 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: Hier ist $(A-E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$v_2 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: Jetzt ist $(A-2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix A ist diagonalähnlich.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$