Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
1.6.2006

6. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten $\det(A)$ und $\det(B)$

- mittels der Entwicklung nach Zeilen bzw. Spalten,
- mittels elementarer Umformungen zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Lösung: Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\det A = 4 \cdot 5 - (-1) \cdot (-8) = 12.$$

Wir addieren das vierfache der letzten Zeile zur ersten und erhalten

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vertauschen der Zeilen ergibt

$$\det A = -1 \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 12.$$

Für B entwickeln wir nach der zweiten Spalte. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \det B &= -4 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -6. \end{aligned}$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben

$$\begin{aligned}\det B &= -\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -6.\end{aligned}$$

Aufgabe G2

(a) Im $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren $a = (2 \;\; 1)^T$ und $b = (-2 \;\; 2)^T$ gegeben. Zeichnen Sie diese in eine Skizze und machen Sie sich daran den Begriff der „Dreiecksungleichung“ klar.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Norm und Skalarprodukt den Satz des Pythagoras.

(c) Im $\mathbb{R}^2$ seien durch $-x_1 + 2x_2 = 3$ bzw. $x_1 + 3x_2 = 5$ zwei Geraden G_1 und G_2 gegeben. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden. Geben Sie weiter eine Gerade G_3 an, die G_1 im Winkel $\pi/2$ schneidet.

Lösung:

(a) Die Dreiecksungleichung bedeutet anschaulich, dass der direkte Weg kürzer ist als der Weg über einen anderen Punkt, der nicht auf der Verbindungsstrecke liegt.

(b) Mit Norm und Skalarprodukt formuliert, heißt der Satz des Pythagoras:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

Diese Aussage folgt mit

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(c) Die Geraden sind, bis auf die Normierung, in Hesse-Form gegeben. Es lassen sich daher einfach Vektoren angeben, die auf den Geraden senkrecht stehen. Der Winkel zwischen diesen Vektoren ist der selbe wie der Winkel zwischen den Geraden. Wie man aus den Geradengleichungen abliest steht $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht auf G_1 und $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht auf G_2. Wir berechnen daher den Winkel ω zwischen den Geraden als

$$\omega = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} = \arccos \frac{5}{\sqrt{50}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Da der Vektor x senkrecht auf G_1 steht, kann die gerade G_3 zum Beispiel als

$$G_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gewählt werden.

Aufgabe G3

Es seien

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E_1 = \{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E_2 = \{v_0 + \lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;

(c) Bestimmen Sie die Parameterform der Ebene $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$.

Lösung:

(a) Um einen Vektor zu finden, der Senkrecht zu v_1 und v_2 steht, lösen wir das LGS $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt zum Beispiel

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\|x\| = 3\sqrt{2}$ gilt, folgt

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3\sqrt{2}}(-x_1 - 4x_2 + x_3) = 0\}$$

(b) Da wir schon einen Vektor gefunden haben, der senkrecht auf v_1 und v_2 steht, brauchen wir nur noch v_0 einsetzen. Wir erhalten $-1 + 4 + 1 = 4$, also

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3\sqrt{2}}(-x_1 - 4x_2 + x_3) = \frac{4}{3\sqrt{2}}\}$$

(c) Für die Parameterform der Ebene E_3 lösen wir das LGS $x_1 - x_2 + x_3 = 5$. Wir erhalten

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den folgenden drei Eigenschaften an:

i) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ii) für $G = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ gilt $f(G) = G$,

iii) f ist injektiv.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bzgl. der natürlichen Basis.

Lösung: Zur Bestimmung der linearen Abbildung geben wir die Bilder einer Basis an. Wegen i) und ii) sollten die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zur Basis gehören. Wir wählen $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als dritten Basisvektor. Wegen ii) und der Linearität von f muss $f(b_2) = \lambda_0 b_2$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gelten. Wir wählen $\lambda_0 = 1$. Damit f injektiv wird, muss das Bild der Basis b_1, b_2, b_3 ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sein. Das heißt, wir müssen $f(b_3)$ so wählen, dass $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$ linear unabhängig sind. Wir wählen etwa $f(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ist die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ im Urbild- und der natürlichen Basis im Bildbereich gegeben durch

$$A_{f,EB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit der Inversen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert

$$A_{f,EE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2

(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal? (Eine Matrix A ist orthogonal, falls $A^T = A^{-1}$ gilt.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|\det(A)| = 1$ an, die nicht orthogonal ist.

(c) Gegeben sei die Ebene E, die die Punkte $(1,0,0)^T$, $(2,1,1)^T$ und $(1,1,0)^T$ enthält. Geben Sie die Hesse-Normalform von E an.

(d) Es sei $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = b_2$ und $\varphi(b_3) = 0$. Weiter sei A die Abbildungsmatrix von φ bzgl. B. Bestimmen Sie Rang A und $\ker(A)$.

Lösung:

(a) Die erste Matrix ist nicht orthogonal, da zwar die Spaltenvektoren senkrecht aufeinander stehen, diese aber nicht normiert sind. (Länge ist jeweils $\sqrt{2}$.)
Die zweite Matrix ist orthogonal, da die Spalten gerade aus den Einheitsvektoren bestehen.
Die dritte Matrix ist nicht orthogonal, sie ist noch nicht einmal quadratisch.
Die vierte Matrix ist orthogonal, da im Vergleich zur ersten Matrix die Spalten diesmal normiert sind.

(b) Zum Beispiel hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante 1 ist aber wegen der ersten beiden Spalten nicht orthogonal.

(c) Die Ebene E wird von den Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Richtungsvektoren aufgespannt und hat $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Stützvektor.

Wie man leicht erkennen kann steht $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf u und v. Mit $\langle w, v_0 \rangle = 1$ ergibt sich die HNF zu

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 1\}.$$

(d) Die Abbildungsmatrix ist gegeben durch

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Rang gleich 2. Das heißt aber auch, dass der Kern von A 1-dimensional ist. Da $b_3 \in \ker(A)$ gilt, folgt $\ker(A) = \mathbf{Lin}\{b_3\}$.