Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
26.05.2006

5. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

i. Zeigen Sie, dass v_1, v_2 bzw. w_1, w_2, w_3 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ ist.
ii. Durch $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$ wird eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert. Berechnen Sie $\varphi\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
iii. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basen v_1, v_2 des $\mathbb{R}^2$ und w_1, w_2, w_3 des $\mathbb{R}^3$ an.
iv. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basen an.

(b) Es sei V ein Vektorraum, $a \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Abbildungen $\varphi_i : V \to V$, $i = 1, \ldots, 4$ sind linear?

$$\varphi_1(v) = v + a \qquad \varphi_2(v) = \lambda v \qquad \varphi_3(v) = a \qquad \varphi_4(v) = v + v$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ die Abbildungsmatrizen bezüglich der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$.

Lösung:

(a) i. Die Vektoren v_1 und v_2 sind offensichtlich linear unabhängig, da $v_1 = \lambda v_2$ für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten kann. Für w_1, w_2, w_3 bestimmen wir den Rang der Matrix, die diese Vektoren als Spalten enthält. Wir berechnen durch Spaltenumformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Da der Rang dieser Matrix gleich 3 ist, folgt die lineare Unabhängigkeit.

ii. Da $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = v_1 + 3v_2$ gilt, folgt wegen der Linearität von φ, dass $\varphi\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \varphi(v_1 + 3v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(3v_2) = \varphi(v_1) + 3\varphi(v_2) = w_1 + 3w_2$ gilt. Also

$$\varphi\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

iii. Die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ und der Basis $\{w_1, w_2, w_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv. Für die natürliche Basis $\{e_1, e_2\}$ gilt $e_1 = 2v_1 - v_2$ und $e_2 = v_2 - v_1$. Daher folgt wegen der Linearität von φ, dass

$$\varphi(e_1) = 2\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 2w_1 - w_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi(e_2) = w_2 - w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basis in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ zu

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(b) • φ_1 ist linear genau dann, wenn $a = 0$ gilt. Ist $a = 0$ so ist φ_1 die Identität in V also linear. Die Abbildungsmatrix ist in diesem Fall daher E_n.
Ist $a \neq 0$ so ist φ_1 wegen $\varphi_1(0) = a \neq 2a = \varphi_1(0+0) = \varphi_1(0) + \varphi_1(0)$ nicht linear.

- φ_2 ist linear, denn für $v, w \in V$ und $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

  $$\varphi_2(sv + tw) = \lambda(sv + tw) = \lambda sv + \lambda tw = s\lambda v + t\lambda w = s\varphi_2(v) + t\varphi_2(w).$$

  Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die natürliche Basis in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $\varphi_2(e_i) = \lambda e_i$ also ist die Abbildungsmatrix von φ_2 gegeben durch λE_n.
- φ_3 ist linear genau dann, wenn $a = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\varphi_3(v) = 0$ für alle $v \in V$, also auch $0 = \varphi_3(sv + tw) = s\varphi_3(v) + t\varphi_3(w) = 0$. Die Abbildungsmatrix in $\mathbb{R}^n$ ist daher auch gegeben durch die Nullmatrix.
  Ist $a \neq 0$ so ist φ_3 auch nicht linear, denn $\varphi_3(0) = a \neq 0$.
- φ_4 ist linear, da $\varphi_4(v) = 2v$, das heißt dies ist ein Spezialfall von φ_2 ($\lambda = 2$).

Aufgabe G2

Es sei eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ durch die Gleichung $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ gegeben. Wir wollen die Spiegelung an dieser Ebene betrachten. Das ist eine lineare Abbildung, die wir mit f bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und geben Sie eine Basis v_1, v_2 von E an.

(b) Was ist $f(v_1)$ und $f(v_2)$?

(c) Geben Sie einen Vektor $v_3 \notin E$ an, für den $f(v_3)$ leicht zu bestimmen ist.

(d) Warum sind die gewählten Vektoren v_1, v_2, v_3 nun eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich dieser Basis an.

(e) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

(a) Lösen des LGS $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ liefert

$$E = \{\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbf{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Damit ist E offensichtlich ein Unterraum. Eine Basis ist z.B.

$$\left\{ v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Es gilt $f(v_1) = v_1$ und $f(v_2) = v_2$, da diese Vektoren in der Spiegelungsebene liegen.

(c) Ist v_3 senkrecht zu E, so gilt $f(v_3) = -v_3$. (Das heißt gerade Spiegelung an der Ebene E!)

Es gilt $(2\ -1\ 1)v_1 = 0 = (2\ -1\ 1)v_2$. Wir wählen daher $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es gilt $f(v_3) = -v_3$.

(d) Ist $v \notin E$ so gilt für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dass $\lambda v_1 + \mu v_2 \neq v$, also sind v_1, v_2, v linear unabhängig. Da $v_3 \notin E$ ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Da $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$ und $f(v_3) = -v_3$ folgt, dass die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Basis $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ durch

$$A_{f,V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist.

(e) Nach Bemerkung 3 in Kap. 5 der Vorlesung ist die Darstellung bzgl. der natürlichen Basis E von Koordinatenvektoren in $\mathbb{R}^3$, die bzgl. der Basis V gegeben sind, durch

$$T_{EV} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt.
Die Inverse dieser Matrix ist gegeben durch

$$T_{EV}^{-1} = T_{VE} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix bzgl. der natürlichen Basis ergibt sich nun aus

$$A_{f,E} = T_{EV}A_{f,V}T_{VE} = T_{EV}A_{f,V}T_{EV}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basen.

(b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung der Ebene um $\pi/2$ mit anschließender Spiegelung an der Gerade $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \right\}$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

(a) Die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Basis $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ und der natürlichen Basis in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$A_{\varphi,EV} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die Koordinatenvektoren bzgl. V in Koordinatenvektoren bzgl. der natürlichen Basis in $\mathbb{R}^3$ überführt, ist gegeben durch (Siehe Kapitel 5, Bemerkung 3)

$$T_{EV} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dieser Matrix ist

$$T_{VE} = T_{EV}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der natürlichen Basis gegeben durch

$$A_{\varphi,E} = A_{\varphi,EV} T_{VE} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 8 & 10 \\ 7 & -10 & -9 \end{pmatrix}.$$

(b) Nach Kap. 5, Beispiel 7 der Vorlesung ist die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der Geraden G gegeben durch

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nach Kap. 1, Bemerkung 21 der Vorlesung ist die Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist insgesamt die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der natürlichen Basis gegeben durch

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2

Es sei eine Gerade G im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $G = \mathrm{Lin}\big((1 \quad 2 \quad 1)^T\big)$, und es sei f die Drehung um die Achse G mit Winkel π. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der natürlichen Basis.

Hinweis: Wie bei Aufgabe G2 ist es hilfreich, erst eine dem Problem angepasste Basis zu wählen. Man überlege sich was f mit Vektoren aus der Ebene, die durch den Ursprung geht und senkrecht zu G ist, anstellt.

Bestimmen Sie nun noch die Inverse dieser Matrix.

Hinweis: Man kommt dabei ohne Rechnung aus.

Lösung: Sei $v_1 = (1\ 2\ 1)^T$. Da f eine Drehung um die Gerade G beschreibt gilt $f(v_1) = v_1$. Wir bestimmen nun linear unabhängige Vektoren v_2, v_3, die senkrecht auf G stehen. Wir lösen dazu das LGS $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Dies ergibt etwa die Vektoren

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da f die Drehung um G mit Winkel π ist gilt $f(v_2) = -v_2$ und $f(v_3) = -v_3$. Damit ist die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Basis $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ gegeben durch

$$A_{f,V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie bei Aufgabe G2 bestimmt man

$$T_{EV} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_{EV}^{-1} = T_{VE} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Also folgt für die Abbildungsmatrix von f bzgl. der natürlichen Basis

$$A_{f,E} = T_{EV} A_{f,V} T_{EV}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da die zweifache Anwendung von f eine Drehung mit Winkel 2π ist gilt $f^2 = Id$. Das heißt, dass die Inverse Abbildung zu f wieder f ist also $f^{-1} = f$ gilt. Damit ist die Inverse der Matrix $A_{f,E}$ gegeben durch

$$A_{f,E}^{-1} = A_{f,E} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$