Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
18.05.2006

4. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ Diagonalmatrizen, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

mit reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$.

i. Berechnen Sie $A \cdot B$

ii. Für welche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass $E_n - A$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(E_n - A)^{-1} = E_n + A(E_n - A)^{-1}$$

(c) Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix mit $2C = C^2 - E_n$. Zeigen Sie: C ist invertierbar.

Lösung:

(a) Mit $(E_n - A)A = A - A^2 = A(E_n - A)$ folgt

$$\begin{aligned}(E_n - A)(E_n + A(E_n - A)^{-1}) &= (E_n - A) + (E_n - A)A(E_n - A)^{-1} \\ &= (E_n - A) + A(E_n - A)(E_n - A)^{-1} \\ &= (E_n - A) + A \\ &= E_n \\ &= (E_n - A) + A \\ &= (E_n + A(E_n - A)^{-1})(E_n - A)\end{aligned}$$

und damit auch die Behauptung.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Cx = 0$. Dann gilt $0 = 2Cx = (C^2 - E_n)x = C^2x - E_n x = x$, also $x = 0$. Damit folgt $\mathbf{Kern}(C) = \{0\}$ und mit Satz 21 folgt, dass C invertierbar ist.

(c) Es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

Also folgt $A \cdot B = E_n$, genau dann, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \neq 0$ und $b_i = \frac{1}{a_i}$ gilt. Daher ist A, falls $a_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2

Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$, so dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(a) die Lösungsmenge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) die Lösungsmenge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.

Lösung:

(a) Die Lösungsmenge G beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Das heißt, dass der Rang der Matrix zum gesuchten LGS gleich 2 sein muss. Außerdem muss

$$\ker(A) = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gelten. Die Zeilen a_1, a_2 der Matrix werden daher so gewählt, dass $a_1 \cdot (1,1,1)^T = a_2 \cdot (1,1,1)^T = 0$ gilt. Wir setzen A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für die rechte Seite berechnen wir $(1,-1,0) \cdot (1,2,3)^T = -1$ und $(1,0,-1) \cdot (1,2,3)^T = -2$. Ein LGS das G als Lösungsmenge hat ist damit

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Diesmal muss Rang(A)=1 gelten. Wir suchen A mit

$$\textbf{Kern}(A) = \textbf{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Wir wählen $A = (1 \; -1 \; 0)$. (Löse das LGS $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$). Einsetzen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d.h. $1 - 2 = -1$ ergibt $b = -1$. Damit ist E Lösungsmenge des LGS $(1 \; -1 \; 0)x = -1$.

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es ergeben sich folgende Determinanten:

$\det(A) = 1 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 7$ nach Beispiel 2 der Vorlesung

$\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 3$=6 nach Satz 3 (vi)

Da $\text{rg}(C) = 2 \neq 3$ gilt, ist C nicht invertierbar. Es folgt mit Satz 3 (iv), dass $\det(C) = 0$ gilt.

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt nach Satz 5

$$\det(D) = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Bsp. 2}}{=} 2\cdot(3-2) = 2$$

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A und Rang(A).

(b) Lösen Sie (falls möglich) die LGSe $Ax = b$ und $Ax = c$, mit

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}^3$ für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

Lösung:

(a) Wir bestimmen den Kern durch Zeilenumformungen von A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\operatorname{rg}(A) = 1$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des Kerns.

(b) Zeilenumformung mit b bzw. c als rechter Seite ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Damit folgt, dass das LGS $Ax = b$ lösbar, aber das LGS $Ax = c$ nicht lösbar ist.

Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgrund der durchgeführten Zeilenumformungen ist $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $-2b_1 + b_2 = 0$ und $b_1 + b_2 = 0$ gilt, d.h. $b = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H2

Es seien die drei Punkte $x_0 := (1,0,1)^T$, $x_1 = (0,1,1)^T$ und $x_2 = (1,1,0)^T$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Verifizieren Sie, dass die Vektoren $x_1 - x_0$ und $x_2 - x_0$ linear unabhängig sind.

(b) Betrachten Sie die durch x_0, x_1 und x_2 aufgespannte Ebene

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge E ist.

Lösung:

(a) Es gilt $x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x_2 - x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Da aus $\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, folgt, dass $-\alpha_1 + 0\alpha_2 = -\alpha_1 = 0$ und $0\alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_2 = 0$ gilt, sind $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

(b) Aus (a) folgt

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie bei Aufgabe G2 bestimmt man $A = (1\ 1\ 1)$ und $b = 2$.