



3. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Matrizen in Zeilenstufenform gegeben sind. Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = 3$ lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $Cx = d$ mit $d = (1, 1, 1)^T$.

Lösung: Die Matrizen A und C sind in Zeilenstufenform gegeben. Die Matrix B ist nicht in Zeilenstufenform. Das LGS $Ax = 3$ ist lösbar. Jeder Vektor x mit $x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 3$ ist Lösung (z.B. $(0, 0, 0, 1)$). Da der Rang von C gleich 3 ist, hat das LGS $Cx = d$ eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese lautet $x = (3, -1, 1)^T$.

Aufgabe G2

Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix sowie die Dimension des Lösungsraums. Geben Sie den Lösungsraum an.

Lösung: (1) Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Matrix (A, b) des ersten Gleichungssystems sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad (A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right).$$

Es gilt $\text{rg}A = 1$ und $\text{rg}(A, b) = 1$, also ist das Gleichungssystem lösbar. Die Dimension des Lösungsraums ist $3 - \text{rg}A = 2$. Insbesondere ist der Lösungsraum gerade $\mathbf{Kern}(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man

$$\begin{aligned} x_3 &= t, \\ x_2 &= s, \\ x_1 + 2s + 3t &= 0 \Rightarrow x_1 = -2s - 3t \end{aligned}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$. Der Lösungsraum dieses LGS ist also

$$L_1 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) Beim zweiten Gleichungssystem sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right).$$

Damit ist $\text{rg}A = 3$. Aus $\text{rg}A \leq \text{rg}(A, b) \leq 3$ folgt $\text{rg}(A, b) = 3$. Damit ist das LGS eindeutig lösbar. Um die Lösung zu bestimmen, wenden wir erneut elementare Zeilenumformungen an, diesmal auf die erweiterte Koeffizientenmatrix.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \Rightarrow x_3 = 1, \\ 2x_2 - 5 &= -3 \Rightarrow x_2 = 1, \\ x_1 + 2 &= 1 \Rightarrow x_1 = -1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Mit elementaren Zeilenumformungen (Gauss-Jordan-Elimination) angewandt auf (A, E) erhält man (E, A^{-1}) .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4

Untersuchen Sie jeweils für die folgenden Mengen, ob sie Unterräume des angegebenen Vektorraums sind. Beweisen oder widerlegen Sie das jeweils.

(a) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \right\}$ in \mathbb{R}^3 ,

(b) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1 \right\}$ in \mathbb{R}^3 ,

(c) $U_3 := \{p \in P : p(1) = 0\}$ in P , dem Vektorraum der Polynome (vgl. 1. Übung),

(d) Für $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge $M_b := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{x} = b\}$ in \mathbb{R}^n .

Lösung:

(a) U_1 ist ein Untervektorraum, denn aus $x, y \in U_1$ und

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix}$$

folgt $\alpha x_1 + \beta y_1 = 0$ und $\alpha x_2 + \beta y_2 = 0$, d.h. $\alpha x + \beta y \in U_1$.

- (b) U_2 ist kein Untervektorraum, da $0 \notin U_2$.
- (c) U_3 ist ein Untervektorraum, denn für $p_1, p_2 \in U_3$ gilt auch $\alpha p_1(1) + \beta p_2(1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, also $\alpha p_1 + \beta p_2 \in U_3$.
- (d) Falls $b = 0$ so ist $M_b = \mathbf{Kern}(A)$ und M_b ist damit ein Untervektorraum, denn mit $x_1, x_2 \in \mathbf{Kern}(A)$ folgt $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = 0$, d.h. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbf{Kern}(A)$.
Falls $b \neq 0$, so ist M_b kein Untervektorraum, denn $0 \notin M_b$, da $A0 = 0 \neq b$.

Hausübung

Aufgabe H1

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda - 1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

- (a) keine,
(b) genau eine,
(c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS lautet

$$(A_\lambda, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -2 & 2 \end{array} \right).$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & \lambda + 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 5\lambda & 2\lambda \end{array} \right).$$

Also sind die Fälle $\lambda^2 + 5\lambda = 0$ und $\lambda^2 + 5\lambda \neq 0$ zu betrachten.

$\lambda = 0$: In diesem Fall ist

$$(\tilde{A}_\lambda, \tilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

also ist $\text{rg} A_\lambda = 2 = \text{rg}(A_\lambda, b)$ und das LGS ist lösbar.

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösungen

$$L_0 = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\lambda = -5$: In diesem Fall ist

$$(\tilde{A}_\lambda, \tilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right),$$

also ist $\text{rg}A_\lambda = 2 \neq \text{rg}(A_\lambda, b) = 3$ und das LGS ist nicht lösbar.

$\lambda \neq -5, 0$: Hier gilt $\text{rg}A_\lambda = 3 = \text{rg}(A_\lambda, b)$. Somit ist das LGS eindeutig lösbar. Die eindeutige Lösung ist

$$x_\lambda = \frac{1}{\lambda + 5} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = c$, und $Ax = d$ mit $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie die Lösungsvektoren.

Anmerkung: Dieses LGS ist ein Beispiel dafür, wie eine "kleine" Abweichung in den Daten, die z.B. durch einen Messfehler entsteht, sich zu einer "großen" Abweichung in der Lösung verstärkt.

Lösung: Wie bei Übung G3 berechnet man die Inverse von A . Sie lautet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Außerdem erhält man

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 96 \\ -90 \end{pmatrix}$$

und

$$y = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 78 \\ -72 \end{pmatrix}.$$

Damit ist x die Lösung zum Gleichungssystem mit rechter Seite c und y die Lösung zum Gleichungssystem mit rechter Seite d .