Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
04.05.2006

# 2. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

## Gruppenübung

### Aufgabe G1

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie nacheinander die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1$$

und

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2.$$

Beschreiben Sie die Wirkung der Matrixmultiplikation auf die Matrizen $A_i$.

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $B$, so dass $B \cdot A_3$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Welchen Rang hat die Matrix $A$.

**Lösung:** Es gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man über $B \cdot A_3$ die obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da $A_3$ den Rang 3 hat, gilt dies auch für die Matrix $A$.

**Aufgabe G2**

Betrachten Sie für die folgenden vier Matrizen jeweils die Mengen der Spaltenvektoren. Stellen Sie fest, welche dieser Mengen linear (un-)abhängig sind. Untersuchen Sie weiterhin, ob die lineare Hülle der jeweiligen Menge gleich $\mathbb{R}^3$ ist und ob diese Menge eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie weiterhin alle Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ mit $Dv = 0$.

**Lösung:**

$A$: linear abhängig ($s_3 = 2 \cdot s_1 + (-1) \cdot s_2$), da diese Menge drei Elemente enthält, kann $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3) = \mathbb{R}^3$ nicht gelten, insbesondere ist die Menge keine Basis.

$B$: linear abhängig (4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig!), $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3, s_4) = \mathbb{R}^3$, da $s_1, s_2, s_3$ linear unabhängig sind, (Überprüfung durch LGS!), keine Basis.

$C$: linear abhängig ($s_3 = 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_3$), wie bei $A$ folgt $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3) \neq \mathbb{R}^3$, keine Basis.

$D$: linear unabhängig, $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3) = \mathbb{R}^3$, Basis.

Aus Teil $D$ folgt, dass nur $v = 0$ der Gleichung $Dv = 0$ genügt.

## Hausübung

**Aufgabe H1**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $B$, so dass $B \cdot A$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Prüfen Sie dies anhand einer Proberechnung nach! Lösen Sie anschließend das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Wir multiplizieren die Matrix $A$ nacheinander mit Elementarmatrizen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A_4.$$

Da $A_4$ eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um das LGS zu lösen, multiplizieren wir die Gleichung von links mit der Matrix $B$. Wir erhalten somit

$$(B \cdot A)x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung lässt sich nun einfach ablesen. Es gilt

$$x_3 = 0, \qquad x_2 = -1 + 4x_3 = -1, \qquad x_1 = 1 - 0x_2 - 3x_3 = 1.$$

somit ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Lösung der Gleichung.

**Aufgabe H2**

Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren $s_1, s_2, s_3, s_4$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Geben Sie eine Basis des Unterraums $U = \mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3, s_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ an.

**Lösung:** Die Spaltenvektoren sind linear abhängig:

$$(-23) \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3 = 0.$$

Weiterhin sind $s_1, s_2, s_4$ linear unabhängig und bilden eine Basis von $U$.