



# 1. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

## Gruppenübung

### Aufgabe G1

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen  $A \cdot B$  und  $B \cdot A$ , sowie  $A + B$  und  $B + A$ .

**Lösung:** Es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe G2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

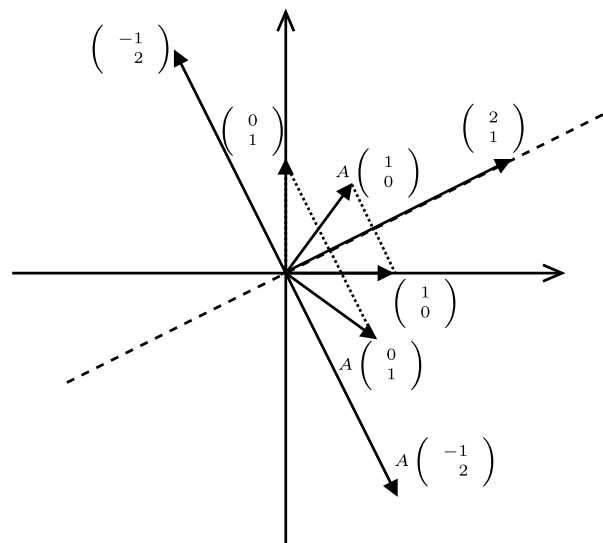
Wir betrachten die Abbildung  $x \mapsto Ax$  mit  $D(A) = \mathbb{R}^2$ . Berechnen Sie das Bild der Punkte  $(1, 0)^T$ ,  $(0, 1)^T$ ,  $(2, 1)^T$  und  $(-1, 2)^T$ . Veranschaulichen Sie sich die Wirkung

der Abbildung auf die gegebenen Punkte anhand einer Skizze. Wie würden Sie diese Abbildung geometrisch beschreiben?

**Lösung:** Es gilt

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Die Abbildung beschreibt die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung mit Richtungsvektor  $(2, 1)^T$ .

### Aufgabe G3

Wir definieren die Menge der Polynome als

$$P := \{p : D(p) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i\}.$$

Desweiteren definieren wir die Addition und die Skalarmultiplikation für Elemente  $p, q \in P$  durch

$$(p + q)(x) := p(x) + q(x) \quad \text{und} \quad (\lambda \cdot p)(x) := \lambda \cdot p(x).$$

- Zeigen Sie, dass  $P$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist.
- Zeigen Sie, dass die Menge  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  linear unabhängig ist. Welche Dimension hat der Vektorraum  $P$ ?

**Lösung:** (a) Wir überprüfen die Vektorraumaxiome:

(i): Da  $0 + p(x) = p(x) + 0 = p(x)$  gilt, ist das neutrale Element bzgl. der Addition das Polynom  $o(x) = 0$ . Das inverse Element zu  $p \in P$  bzgl. der Addition ist  $i(x) := -p(x)$ , da  $i(x) + p(x) = -p(x) + p(x) = 0 = o(x)$ . Außerdem gilt  $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$ . Also ist die Addition von  $p$  und  $q$  kommutativ. Das Assoziativgesetz folgt ebenso, da  $((p + q) + v)(x) = (p(x) + q(x)) + v(x) = p(x) + (q(x) + v(x)) = (p + (q + v))(x)$ , für alle  $p, q, v \in P$ .

(ii): Seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $p, q \in P$ . Dann gilt

$$(\lambda(\mu p))(x) = (\lambda(\mu p)(x)) = ((\lambda\mu)p(x)) = ((\lambda\mu)p)(x)$$

und  $(1p)(x) = 1p(x) = p(x)$ . Außerdem gelten die Distributivgesetze

$$((\lambda + \mu)p)(x) = ((\lambda + \mu)p(x)) = \lambda p(x) + \mu p(x)$$

und

$$(\lambda(p + q))(x) = \lambda(p(x) + q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x).$$

Damit sind die Vektorraumaxiome für  $P$  erfüllt.

(b) Wir zeigen, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_i = 0$  gilt. Aus dem ersten Semester wissen wir, dass jedes Polynom  $p \neq 0$  vom Grad  $n$  höchstens  $n$  reelle Nullstellen hat. Gilt  $0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ , so ist jede reelle Zahl Nullstelle des Polynoms  $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ .

## Hausübung

### Aufgabe H1

(a) Gegeben sei die  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $ad - bc \neq 0$ . Zeigen Sie, dass die zu  $A$  inverse Matrix gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $A^{42}$ .

**Hinweis:** Die Matrix beschreibt die Drehung um den Ursprung mit Winkel  $\frac{\pi}{2}$ .

**Lösung:**

(a)  $A \cdot A^{-1} = E$  nachrechnen!

(b) nach (a) gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

damit gilt

$$x = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Da  $42 \bmod 4 = 2$  ist  $A^{42}$  die Drehung mit Winkel  $\pi$  und damit

$$A^{42} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe H2

Wir betrachten die Vektoren

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = x^2 - 1 \quad p_4(x) = x \quad \in P,$$

wobei  $P$  der Vektorraum der Polynome aus Aufgabe G3 ist.

(a) Entscheiden Sie, ob die Mengen  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  bzw.  $\{p_1, p_2\}$  linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die lineare Hülle von  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ .

**Lösung:** (a) Die Menge  $\{p_1, p_2, p_3\}$  ist linear abhängig, da  $x^2 - 1 = x + x^2 - (1 + x)$  folgt  $p_3 = p_2 - p_1$ , also auch  $0 = p_2 - p_1 - p_3$ . Damit ist diese Menge nicht linear unabhängig.

Die Menge  $\{p_1, p_2\}$  ist linear unabhängig, da sonst  $\alpha p_1 = p_2$  für ein  $\alpha \neq 0$  gelten müsste. Setzt man  $x = 0$  in die Gleichung  $\alpha(1 + x) = x + x^2$  so folgt  $\alpha = 0$  und damit ist  $\{p_1, p_2\}$  linear unabhängig.

(b) Aus dem (a)-Teil wissen wir, dass  $p_3 = p_2 - p_1$ . Wir zeigen nun, dass  $\{p_1, p_2, p_4\}$  linear unabhängig ist. Gilt  $0 = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(x + x^2) + \alpha_3x$ , so folgt durch Einsetzen von  $x = 0$ , dass  $\alpha_1 = 0$  sein muss. Das heißt es gilt  $0 = (\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_2x^2$ . Einsetzen von  $x = -1$  liefert  $\alpha_3 = 0$ . Damit folgt aber (z.B. mit  $x = 1$ ) auch, dass  $0 = 2\alpha_2$  also  $\alpha_2 = 0$  und dies liefert die lineare Unabhängigkeit von  $\{p_1, p_2, p_4\}$ . Damit gilt  $\mathbf{Lin}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathbf{Lin}(p_1, p_2, p_4) = \{q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_4 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$ . Da  $1 = p_1 - p_4$  und  $x^2 = p_2 - p_4$  folgt, dass die lineare Hülle von  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  gerade aus den Polynomen mit Grad höchstens 2 besteht.