Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
20.04.2006

0. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Aufgabe/Wiederholung zu Reihen
Die folgenden beiden Reihen sind den Beispielen im Kapitel 19 des Arbeitsbuches (siehe Literaturhinweise zur Vorlesung) entnommen. Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass diese Reihen konvergieren.

$$a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad\qquad b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{k}\right)^k$$

Lösung:
Das Quotientenkriterium auf die erste Reihe angewendet ergibt

$$\frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(k!)^2(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)2(k+1)} \le \frac{1}{2}.$$

Damit folgt, dass die Reihe konvergent ist.
Für die zweite Reihe ergibt sich

$$\frac{4^{k+1}k^k}{4^k(k+1)^{k+1}} = \frac{4}{k+1}\frac{k^k}{(k+1)^k} \le \frac{4}{k+1} \le q < 1$$

für $k > 3$. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe.

Aufgabe zum Einstimmen auf Potenzreihen
Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ habe den Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n a_n}{3} x^{2n}$ den Konvergenzradius

$$(a) \quad 4\rho \qquad\qquad (b) \quad \frac{4}{3}\rho \qquad\qquad (c) \quad \sqrt{2\rho} \qquad\qquad (d) \quad \frac{1}{2}\sqrt{\rho}$$

Lösung: Richtig ist Antwort (d).

Hausübung

Aufgabe H1

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1+(-1)^n)x^n \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^5 x^n \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}$$

Lösung: $a)$ Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1+(-1)^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = 0$, falls n ungerade ist und $a_n = 1$. Das heißt, wir können durch Indexänderung die Reihe wie folgt schreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1+(-1)^n)x^n = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k.$$

Damit folgt, dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn $x^2 < 1$. Also ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 1.

$b)$ Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)^5}{n^5} = \frac{n^5 + \sum_{k=1}^{5} \binom{n}{k} n^{5-k}}{n^5} \\ &\to 1 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt nun für den Konvergenzradius $\rho = 1$.

$c)$ Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^{2(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}} \right| = \frac{1}{2}|x|^2.$$

Das bedeutet, dass nach dem Quotienkriterium die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2}|x^2| < 1$ konvergiert und divergiert, falls $\frac{1}{2}|x^2| > 1$. Also ist die Reihe für $|x| < \sqrt{2}$ konvergent und für $|x| > \sqrt{2}$ divergent. Das heißt aber nichts anderes als, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\rho = \sqrt{2}$ ist.

Aufgabe H2

Gegeben seien die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} x^n$.

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren diese Reihen? Liegt auch absolute Konvergenz vor?

(b) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen.
Hinweis: Nummerieren Sie die Reihen so um, dass der Laufindex bei 0 beginnt.

Lösung: (a) Das Quotientenkriterium liefert

$$\left|\frac{|x|^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}x^n}\right| = |x|\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} \le \frac{|x|}{n+1} \le q < 1$$

für alle $n \ge N > \frac{|x|}{q}$. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

Für die zweite Reihe gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^{n+1}2^n}{2^{n+1}n(-1)^n x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)x}{2n}\right| \to \frac{|x|}{2} \quad (n \to \infty),$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut für $|x| < 2$.

Für $x = 2$ ergibt sich die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ und für $x = -2$ die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} n$, die beide divergieren.

Insgesamt folgt also, dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn $|x| < 2$. Dort konvergiert sie auch absolut.

(b) Mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(-1)^{k+1}x^{k+1}}{2^{k+1}}$$

können wir das Cauchy-Produkt folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(-1)^{k+1}x^{k+1}}{2^{k+1}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j+1}(k-j+1)}{2^{k-j+1}(j+1)^{j+1}} x^{k+1}
\end{aligned}$$