Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
20.7.2006

13. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) d(x,y)$$

in Abhängigkeit von R. Der Integrationsbereich ist dabei die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt $(0,0)$:

$$B_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Berechnen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation (Polarkoordinaten)

$$g : [0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2

Der Membranmantel eines Kühlturms K lässt sich als Rotationskörper darstellen. Dabei wird das Hyperbelstück

$$x^2 - z^2 = 1, \quad -1 \leq z \leq 1$$

um die z-Achse gedreht. Stellen Sie die Menge K in kartesischen Koordinaten dar und berechnen Sie dann das Volumen mit Hilfe einer geeigneten Transformation.

Aufgabe G3

Sei $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Begründen Sie zunächst, wieso E ein Normalbereich ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Transformation (verallgemeinerte Polarkoordinaten)

$$g : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Hinweise zur Vordiplomprüfung

1. In der Vordiplomprüfung wird der Stoff bis einschließlich

   Kap. VIII, §3 Transformationsformel

   geprüft.

2. Zur Vordiplomprüfung sind **keine** Hilfsmittel zugelassen (gleiche Regelung wie bei den Scheinklausuren).

3. Es ist geplant, 1-2 Wochen vor der Vordiplomprüfung Sprechstunden anzubieten. Die genauen Termine werden rechtzeitig auf unserer Webseite bekanntgegeben.