Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
13.7.2006

# 12. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

Sei $r \in [-1, 1)$. Durch die Menge

$$K_r = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\, x_3 \leq r\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von $K_r$.

**Aufgabe G2**

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \exp(x + 2y), \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \end{aligned}$$

und die Mengen

$$\begin{aligned} M &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}, \\ N &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f|_M$ und $f|_N$. Begründen sie dabei zuerst, weshalb globale Minima bzw. Maxima für beide Probleme existieren.

**Aufgabe G3**

Es sei durch

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x_1 \le 3,\ \ 1 \le x_2 \le 2,\ \ -1 \le x_3 \le 1\}$$

und die Dichtefunktion

$$\rho : Q \to \mathbb{R}, \quad \rho(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)$$

ein inhomogener Quader gegeben. Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M := \int_Q \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3)$$

sowie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$, gegeben durch

$$S_i := \frac{1}{M} \int_Q x_i \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, \dots, 3,$$

des Quaders. Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale existieren.

*Hinweis*: $\frac{d}{dz}\left((z+1)\exp(-z)\right) = -z\exp(-z)$.

# Hausübung

## Freiwillige Abgabe

**Aufgabe H1**

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [0, 2]^2, z = xy^2 + y^3\right\}$$

und oberhalb des Quadrats

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [0, 2]^2, z = 0\right\}$$

liegt.

**Aufgabe H2**

Es sei $B$ der Bereich im ersten Quadranten zwischen den Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$. Skizzieren Sie $B$ und berechnen Sie

$$\int_B \sqrt{x} y\, d(x, y).$$