



12. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $r \in [-1, 1)$. Durch die Menge

$$K_r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_3 \leq r\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K_r .

Aufgabe G2

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &= \exp(x + 2y), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &= x^2 + y^2 - 4 \end{aligned}$$

und die Mengen

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}, \\ N &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f|_M$ und $f|_N$. Begründen sie dabei zuerst, weshalb globale Minima bzw. Maxima für beide Probleme existieren.

Aufgabe G3

Es sei durch

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 \leq 2, -1 \leq x_3 \leq 1\}$$

und die Dichtefunktion

$$\rho : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)$$

ein inhomogener Quader gegeben. Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M := \int_Q \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

sowie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$, gegeben durch

$$S_i := \frac{1}{M} \int_Q x_i \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, \dots, 3,$$

des Quaders. Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale existieren.

Hinweis: $\frac{d}{dz} ((z + 1) \exp(-z)) = -z \exp(-z)$.

Hausübung

Freiwillige Abgabe

Aufgabe H1

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [0, 2]^2, z = xy^2 + y^3\}$$

und oberhalb des Quadrats

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [0, 2]^2, z = 0\}$$

liegt.

Aufgabe H2

Es sei B der Bereich im ersten Quadranten zwischen den Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$.
Skizzieren Sie B und berechnen Sie

$$\int_B \sqrt{xy} d(x, y).$$