Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
22.6.2006

9. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist (Differenzenquotient!). Was ist der Gradient von f in $(0,0)$?

(b) In welchen Punkten ist f stetig partiell differenzierbar?

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f in allen Punkten, in denen sie existiert.

(d) Was können Sie über den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und Stetigkeit aussagen?

Aufgabe G2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 - y$.

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Schnitte des Funktionsgraphen für $x = -1, 0, 1$, bzw. $y = -1, 0, 1$, d.h. die Graphen der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $y \mapsto f(-1,y)$, $y \mapsto f(0,y)$ und $y \mapsto f(1,y)$ bzw. $x \mapsto f(x,-1)$, $x \mapsto f(x,0)$ und $x \mapsto f(x,1)$.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumengen von f zu den Niveaus -2, -1, 0, 1 und 2.

(c) Skizzieren Sie ein 3-dimensionales Bild des Graphen.

Aufgabe G3

Die Funktion $u : \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$u(t,x,y) = (4\pi t)^{-1} \exp\left[-(x^2+y^2)/4t\right].$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$$

gilt, indem Sie die auftretenden partiellen Ableitungen berechnen.

Bemerkung: Eine Funktion $u : \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die obige Gleichung erfüllt, heißt Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*. Mit dieser *partiellen Differentialgleichung* lässt sich die zeitliche Entwicklung einer zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Temperaturverteilung beschreiben.

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Funktion $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den drei Komponentenfunktionen

$$\begin{aligned} H_1(x_1,x_2,x_3) &= \cosh(x_1^2+x_2^2-x_3), \\ H_2(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt{\exp(x_1x_2)}, \\ H_3(x_1,x_2,x_3) &= x_3, \end{aligned}$$

also $H(x_1,x_2,x_3) = (H_1(x_1,x_2,x_3), H_2(x_1,x_2,x_3), H_3(x_1,x_2,x_3))$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der Komponenten H_1, H_2, H_3.

(b) Geben Sie die Funktionalmatrix $J_H(x_1,x_2,x_3)$ an.

(c) Berechnen Sie $\det J_H(0,1,1)$.

Aufgabe H2

Zeigen Sie, dass

$$f : [-2,2]^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \sqrt{12381}\,\frac{37x^2 \sin\sqrt{|y|}}{(42-z)^2},$$

ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt.