Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
15.6.2006

8. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die passenden Graphen bzw. Höhenlinien zu folgenden Funktionen.

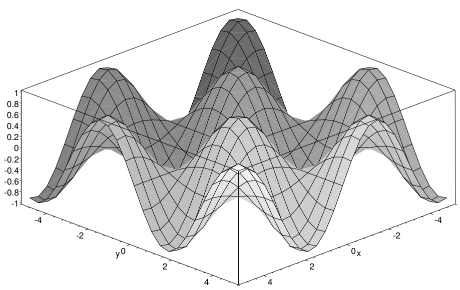
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = x^2 + 4y^2$

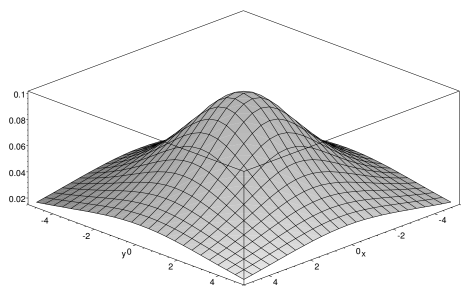
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 10}$

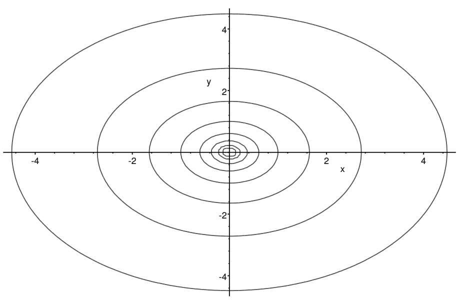
$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_3(x,y) = x + y - 1$

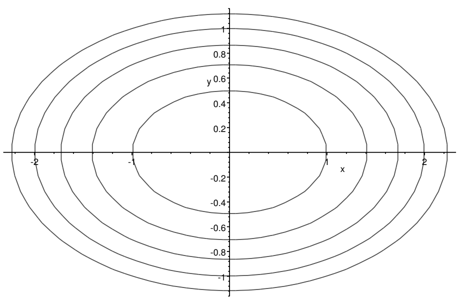
$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_4(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$

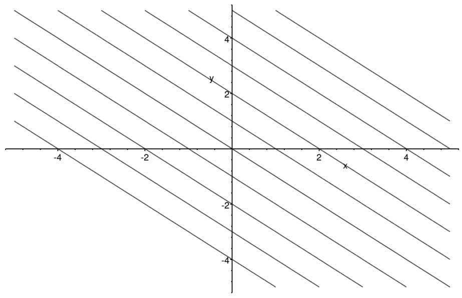
$f_5 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_5(x,y) = \log(x^2 + y^2)$











Aufgabe G2

Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n := (n \;\; \frac{1}{n})^T \quad b_n := (\frac{1}{n^2} \;\; \frac{n}{1+n})^T \quad c_n := (\frac{1}{n^2} \;\; \frac{1}{n^2})^T \quad d_n := \big(\sin\big(\frac{n\pi}{4}\big) \;\; \cos\big(\frac{n\pi}{4}\big)\big)^T, \quad n \geq 1.$$

(a) Skizzieren Sie diese Folgen. Welche dieser Folgen sind beschränkt?

(b) Welche sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(c) Geben Sie zwei weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe G3

Es seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}, \\ B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\big\} \quad \text{und} \\ C &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\big\} \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Welche dieser Mengen sind abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt? Begründen Sie dabei Ihre Aussagen!

(c) Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird die Menge

$$\overline{M} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \text{Es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x.\Big\}$$

als *Abschluss* von M bezeichnet. Bestimmen Sie den Abschluss von A, B und C. Was wäre hier genau zu zeigen?

Hausübung

Aufgabe H1

Es seien

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche dieser Matrizen sind symmetrisch, positiv definit, negativ definit, bzw. orthogonal?

(b) Was weiß man damit jeweils über die Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte der jeweiligen Matrix?

(c) Bestimme eine ONB des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von C.

Hinweis: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit wenn $-A$ negativ definit ist (vgl. Definition).

Aufgabe H2

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie verschiedene Nullfolgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie die Folgen $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe H3

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E = \{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 mit $E = \{\lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Hinweis: Dies ist eine Bonus-Aufgabe.