Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
26.05.2006

5. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

i. Zeigen Sie, dass v_1, v_2 bzw. w_1, w_2, w_3 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ ist.
ii. Durch $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$ wird eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert. Berechnen Sie $\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
iii. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basen v_1, v_2 des $\mathbb{R}^2$ und w_1, w_2, w_3 des $\mathbb{R}^3$ an.
iv. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basen an.

(b) Es sei V ein Vektorraum, $a \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Abbildungen $\varphi_i : V \to V$, $i = 1, \ldots, 4$ sind linear?

$$\varphi_1(v) = v + a \qquad \varphi_2(v) = \lambda v \qquad \varphi_3(v) = a \qquad \varphi_4(v) = v + v$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ die Abbildungsmatrizen bezüglich der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe G2

Es sei eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ durch die Gleichung $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ gegeben. Wir wollen die Spiegelung an dieser Ebene betrachten. Das ist eine lineare Abbildung, die wir mit f bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und geben Sie eine Basis v_1, v_2 von E an.
(b) Was ist $f(v_1)$ und $f(v_2)$?
(c) Geben Sie einen Vektor $v_3 \notin E$ an, für den $f(v_3)$ leicht zu bestimmen ist.

(d) Warum sind die gewählten Vektoren v_1, v_2, v_3 nun eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich dieser Basis an.

(e) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^3$ an.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basen.

(b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung der Ebene um $\pi/2$ mit anschließender Spiegelung an der Gerade $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\right\}$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe H2

Es sei eine Gerade G im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $G = \mathrm{Lin}\big((1 \;\; 2 \;\; 1)^T\big)$, und es sei f die Drehung um die Achse G mit Winkel π. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der natürlichen Basis.

Hinweis: Wie bei Aufgabe G2 ist es hilfreich, erst eine dem Problem angepasste Basis zu wählen. Man überlege sich was f mit Vektoren aus der Ebene, die durch den Ursprung geht und senkrecht zu G ist, anstellt.

Bestimmen Sie nun noch die Inverse dieser Matrix.

Hinweis: Man kommt dabei ohne Rechnung aus.