



5. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 .

- i. Zeigen Sie, dass v_1, v_2 bzw. w_1, w_2, w_3 eine Basis des \mathbb{R}^2 bzw. des \mathbb{R}^3 ist.
 - ii. Durch $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$ wird eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert. Berechnen Sie $\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
 - iii. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basen v_1, v_2 des \mathbb{R}^2 und w_1, w_2, w_3 des \mathbb{R}^3 an.
 - iv. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basen an.
- (b) Es sei V ein Vektorraum, $a \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Abbildungen $\varphi_i : V \rightarrow V$, $i = 1, \dots, 4$ sind linear?

$$\varphi_1(v) = v + a \quad \varphi_2(v) = \lambda v \quad \varphi_3(v) = a \quad \varphi_4(v) = v + v$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ die Abbildungsmatrizen bezüglich der natürlichen Basis des \mathbb{R}^n .

Aufgabe G2

Es sei eine Ebene E im \mathbb{R}^3 durch die Gleichung $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ gegeben. Wir wollen die Spiegelung an dieser Ebene betrachten. Das ist eine lineare Abbildung, die wir mit f bezeichnen.

- (a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum des \mathbb{R}^3 ist und geben Sie eine Basis v_1, v_2 von E an.
- (b) Was ist $f(v_1)$ und $f(v_2)$?
- (c) Geben Sie einen Vektor $v_3 \notin E$ an, für den $f(v_3)$ leicht zu bestimmen ist.

- (d) Warum sind die gewählten Vektoren v_1, v_2, v_3 nun eine Basis des \mathbb{R}^3 ? Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich dieser Basis an.
- (e) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der natürlichen Basis des \mathbb{R}^3 an.

Hausübung

Aufgabe H1

- (a) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basen.

- (b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung der Ebene um $\pi/2$ mit anschließender Spiegelung an der Gerade $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \right\}$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basis des \mathbb{R}^2 an.

Aufgabe H2

Es sei eine Gerade G im \mathbb{R}^3 gegeben durch $G = \text{Lin}((1 \ 2 \ 1)^T)$, und es sei f die Drehung um die Achse G mit Winkel π . Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der natürlichen Basis.

Hinweis: Wie bei Aufgabe G2 ist es hilfreich, erst eine dem Problem angepasste Basis zu wählen. Man überlege sich was f mit Vektoren aus der Ebene, die durch den Ursprung geht und senkrecht zu G ist, anstellt.

Bestimmen Sie nun noch die Inverse dieser Matrix.

Hinweis: Man kommt dabei ohne Rechnung aus.