Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
18.05.2006

4. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ Diagonalmatrizen, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

mit reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$.

i. Berechnen Sie $A \cdot B$

ii. Für welche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass $E_n - A$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(E_n - A)^{-1} = E_n + A(E_n - A)^{-1}$$

(c) Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix mit $2C = C^2 - E_n$. Zeigen Sie: C ist invertierbar.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$, so dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(a) die Lösungsmenge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) die Lösungsmenge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A und $\mathrm{Rang}(A)$.

(b) Lösen Sie (falls möglich) die LGSe $Ax = b$ und $Ax = c$, mit

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}^3$ für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

Aufgabe H2

Es seien die drei Punkte $x_0 := (1,0,1)^T$, $x_1 = (0,1,1)^T$ und $x_2 = (1,1,0)^T$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Verifizieren Sie, dass die Vektoren $x_1 - x_0$ und $x_2 - x_0$ linear unabhängig sind.

(b) Betrachten Sie die durch x_0, x_1 und x_2 aufgespannte Ebene

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0);\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge E ist.