



## 4. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

- (a) Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  Diagonalmatrizen, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

mit reellen Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  und  $b_1, \dots, b_n$ .

- i. Berechnen Sie  $A \cdot B$
  - ii. Für welche Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ist die Matrix  $A$  invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.
- (b) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , so dass  $E_n - A$  invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(E_n - A)^{-1} = E_n + A(E_n - A)^{-1}$$

- (c) Es sei  $C \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine quadratische Matrix mit  $2C = C^2 - E_n$ . Zeigen Sie:  $C$  ist invertierbar.

#### Aufgabe G2

Bestimmen Sie jeweils eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m,3}$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  für ein geeignetes  $m \in \mathbb{N}$ , so dass das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$

(a) die Lösungsmenge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) die Lösungsmenge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.

### Aufgabe G3

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Hausübung

### Aufgabe H1

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von  $A$  und  $\text{Rang}(A)$ .  
(b) Lösen Sie (falls möglich) die LGS  $Ax = b$  und  $Ax = c$ , mit

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Bestimmen Sie alle  $b \in \mathbb{R}^3$  für die das LGS  $Ax = b$  eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

### Aufgabe H2

Es seien die drei Punkte  $x_0 := (1, 0, 1)^T$ ,  $x_1 = (0, 1, 1)^T$  und  $x_2 = (1, 1, 0)^T$  in  $\mathbb{R}^3$  gegeben.

- (a) Verifizieren Sie, dass die Vektoren  $x_1 - x_0$  und  $x_2 - x_0$  linear unabhängig sind.  
(b) Betrachten Sie die durch  $x_0$ ,  $x_1$  und  $x_2$  aufgespannte Ebene

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge  $E$  ist.