



3. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Matrizen in Zeilenstufenform gegeben sind. Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = 3$ lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $Cx = d$ mit $d = (1, 1, 1)^T$.

Aufgabe G2

Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix sowie die Dimension des Lösungsraums. Geben Sie den Lösungsraum an.

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4

Untersuchen Sie jeweils für die folgenden Mengen, ob sie Unterräume des angegebenen Vektorraums sind. Beweisen oder widerlegen Sie das jeweils.

$$(a) U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \right\} \text{ in } \mathbb{R}^3,$$

$$(b) U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1 \right\} \text{ in } \mathbb{R}^3,$$

(c) $U_3 := \{p \in P : p(1) = 0\}$ in P , dem Vektorraum der Polynome (vgl. 1. Übung),

(d) Für $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge $M_b := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{x} = b\}$ in \mathbb{R}^n .

Hausübung

Aufgabe H1

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda - 1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

- (a) keine,
- (b) genau eine,
- (c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

Aufgabe H2

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = c$, und $Ax = d$ mit $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie die Lösungsvektoren.

Anmerkung: Dieses LGS ist ein Beispiel dafür, wie eine "kleine" Abweichung in den Daten, die z.B. durch einen Messfehler entsteht, sich zu einer "großen" Abweichung in der Lösung verstärkt.