Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
27.04.2006

1. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen $A \cdot B$ und $B \cdot A$, sowie $A + B$ und $B + A$.

Aufgabe G2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Abbildung $x \mapsto Ax$ mit $D(A) = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Bild der Punkte $(1,0)^T$, $(0,1)^T$, $(2,1)^T$ und $(-1,2)^T$. Veranschaulichen Sie sich die Wirkung der Abbildung auf die gegebenen Punkte anhand einer Skizze. Wie würden Sie diese Abbildung geometrisch beschreiben?

Aufgabe G3

Wir definieren die Menge der Polynome als

$$P := \{p : D(p) = \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i\}.$$

Desweiteren definieren wir die Addition und die Skalarmultiplikation für Elemente $p, q \in P$ durch

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda \cdot p)(x) := \lambda \cdot p(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass P ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{1,\, x,\, x^2, \dots,\, x^n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängig ist. Welche Dimension hat der Vektorraum P?

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass die zu A inverse Matrix gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{42}.

Hinweis: Die Matrix beschreibt die Drehung um den Ursprung mit Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe H2

Wir betrachten die Vektoren

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = x^2 - 1 \quad p_4(x) = x \quad \in P,$$

wobei P der Vektorraum der Polynome aus Aufgabe G3 ist.

(a) Entscheiden Sie, ob die Mengen $\{p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4\}$ bzw. $\{p_1,\, p_2\}$ linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die lineare Hülle von $\{p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4\}$.