§3 Transformationsformel

1. BEM

Substitutionsregel im Falle $n = 1$:

Ist $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g([a, b]) \subseteq D$, dann

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f \circ g(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Volumenänderung bei Translation um $a \in \mathbb{R}^n$:

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich und

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto x + a,$$

dann

$$\mathrm{vol}(g(B)) = \mathrm{vol}(B).$$

Volumenänderung bei Streckung um $r > 0$:

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich und

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto rx,$$

dann

$$\mathrm{vol}(g(B)) = r^n \cdot \mathrm{vol}(B).$$

2. DEF $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **Gebiet**, falls D offen und zusammenhängend, d.h.

$$\forall\, x, y \in D \quad \exists\, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n \text{stetig} :$$
$$g([0,1]) \subseteq D \quad \wedge \quad g(0) = x \quad \wedge \quad g(1) = y.$$

3. BSP Gebiete in $\mathbb{R}$ sind genau die offenen Intervalle $]a, b[$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

4. SATZ Transformationsformel

Gegeben

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $B_1 \subseteq D$ Normalbereich,
- $g : D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell diff'bar und injektiv mit
$$\forall\, x \in D : \quad \det J_g(x) \neq 0,$$
- $B_2 = g(B_1)$ und $f : B_2 \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f auf B_2 int'bar und

$$\boxed{\int_{B_2} f(x)\, dx = \int_{B_1} f \circ g(x) \cdot |\det J_g(x)|\, dx.}$$

5. BEM Es genügt, wenn die Injektivität von g und die Invertierbarkeit von J_g nur auf einer Teilmenge $D_0 \subseteq D$ mit $\mathrm{vol}(D \setminus D_0) = 0$ vorliegt („bis auf eine Nullmenge").

6. BSP $D = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = Ax + a.$$

Dann $J_g(x) = A$. Im Falle $\det A \neq 0$ zeigt die Transformationsformel

$$\mathrm{vol}(g(B_1)) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}(B_1).$$

Ebenso im Falle $\det A = 0$. Vgl. Bem. 1 und Kap. VI §4, §6.

7. BSP Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ Für $r, \varphi, \theta \in \mathbb{R}$

$$g(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Jacobi-Matrix

$$J_g(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante

$$\begin{aligned} &\det J_g(r, \varphi, \theta) \\ &\quad = \cos\theta \cdot (r^2 \sin\theta\cos\theta) \cdot (-1) - r\sin\theta \cdot (r\sin^2\theta) \cdot (1) \\ &\quad = -r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Wähle in Satz 4

$$D = \,]0,\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \times \,]0,\pi[\,,$$
$$B_1 = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2] \subseteq D.$$

Transformationsformel und Satz von Fubini

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{B_2} f(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\big(r\cos\varphi\sin\theta,\; r\sin\varphi\sin\theta,\; r\cos\theta\big)\, d\varphi \\ &\qquad\qquad\qquad \cdot \sin\theta\, d\theta \cdot r^2 dr. \end{aligned}}$$

Ebenso (durch Grenzbetrachtung) für

$$\begin{aligned} B_1 &= [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2] \\ &\subseteq [0,\infty[\, \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \end{aligned}$$

Speziell für Kugeln und Kugelschalen

$$B_1 = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi],$$
$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : r_1 \leq \|x\| \leq r_2\}.$$

8. BSP Rotationssymmetrische Funktionen

Gegeben $0 \leq r_1 < r_2$ und $h : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Betrachte

$$B_1 = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi],$$
$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : r_1 \leq \|x\| \leq r_2\}.$$

und

$$f(x) = h(\|x\|), \qquad x \in B_2.$$

Dann

$$\boxed{\int_{B_2} f(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3) = 4\pi \cdot \int_{r_1}^{r_2} h(r) \cdot r^2\, dr.}$$

Speziell für $h = 1$ und $r_1 = 0$

$$\mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r_2\}) = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3.$$

Vgl. §2.

9. BEM Weitere Koordinatentransformationen:

Zylinderkoordinaten, elliptische Koordinaten, etc.

Wahl: problemabhängig.

§4 Oberflächenintegrale

1. BSP Für $r > 0$ sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = r\}$ und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig.
Wie „groß“ ist die Fläche S? Was ist der „Mittelwert“ von f?

Dazu: „Beschreibung“ von Flächen in $\mathbb{R}^3$ durch Funktionen von zwei reellen Parametern.

2. BSP Für Sphäre gem. Bsp. 1:

$$Q = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

und für $(u, v) \in Q$

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \sin v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos v \end{pmatrix}.$$

Also

$$S = g(Q).$$

Vgl. Bsp. §3.7.

Im folgenden

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $g : D \to \mathbb{R}^3$ stetig partiell diff'bar,
- $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq D$.

Bezeichnungen

$$J_g(u,v) = (g_u(u,v), g_v(u,v)) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

mit

$$g_u(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \qquad g_v(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

sowie (das Innere von Q)

$$\mathring{Q} = \,]a_1, b_1[\, \times \,]a_2, b_2[\,.$$

3. DEF $\quad S = g(Q)$ (reguläres) **Flächenstück** mit **Parameterdarstellung** $g\big|_Q$, falls

- $g\big|_{\mathring{Q}}$ injektiv,
- $\forall\,(u,v) \in \mathring{Q} : \quad \operatorname{rang} J_g(u,v) = 2.$

(Analog für allgemeinere Mengen Q).

4. BSP **Sphäre**, Fortsetzung von Bsp. 2, also

$$Q = [0, 2\pi] \times [0, \pi], \quad D = \mathbb{R}^2,$$

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \sin v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos v \end{pmatrix}.$$

Dann ist $g\big|_{\mathring{Q}}$ injektiv. Beachte: $g\big|_{Q}$ nicht injektiv.

Weiter

$$g_u(u, v) = r \sin v \cdot \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_v(u, v) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

Zeige für $(u, v) \in \mathring{Q}$: $\quad \operatorname{rang} J_g(u, v) = 2$, d.h.

$$g_u(u, v),\ g_v(u, v) \quad \text{linear unabhängig.}$$

Bew: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $(u, v) \in \mathring{Q}$, gelte

$$\lambda \cdot g_u(u, v) + \mu \cdot g_v(u, v) = 0.$$

Dann $\sin v \neq 0$. Es folgt

$$\mu = 0 \wedge \big(\lambda = 0 \vee \sin u = \cos u = 0\big).$$

Also $\mu = \lambda = 0$. Somit $\operatorname{rang} J_g(u, v) = 2$. Beachte: $\operatorname{rang} J_g(u, v) = 1$ für $v \in \{0, \pi\}$.

5. BSP Graphen als Flächenstücke

Für $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell diff'bar und $(u, v) \in D$ sei

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix}.$$

Dann $g(Q) = G_{h|_Q}$ und

$$J_g(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Graph von $h\big|_Q$ ist Flächenstück mit Par'darstellung $g\big|_Q$.

Im folgenden: Flächenstück $S = g(Q)$ mit Parameterdarstellung $g\big|_Q$ und

$$(u_0, v_0) \in \mathring{Q}, \qquad x_0 = g(u_0, v_0) \in S.$$

6. BEM Betrachte Kurven (**Parameterlinien**)

$$\begin{array}{ccc} [a_1, b_1] & \to & S \\ u & \mapsto & g(u, v_0) \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} [a_2, b_2] & \to & S \\ v & \mapsto & g(u_0, v) \end{array}.$$

In Bsp. 4: Breitenkreise, Meridiane.

Ihre Tangentialvektoren

$$g_u(u_0, v_0), \qquad g_v(u_0, v_0)$$

in u_0 bzw. v_0 sind linear unabhängig. Also

$$T = \{x_0 + \lambda \cdot g_u(u_0, v_0) + \mu \cdot g_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Tangentenebene an S im Punkt x_0.

Idee: in kleiner Umgebung von x_0

- statt Flächenstück S und „Flächeninhalt" in $\mathbb{R}^3$
- Tangentenebene T und darin „Volumen" in $\mathbb{R}^2$ gem. §2.

Spezialfall: Graph als Flächenstück gem. Bsp. 5.

Die Punkte $(u, v, w)^\top \in T$ sind gegeben als

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ h(u_0, v_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_0 + \lambda \\ v_0 + \mu \\ h(u_0, v_0) + \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) + +\mu \cdot \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Also Gleichung von T

$$w = h(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) + (v - v_0)\frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0),$$

vgl. Bsp. VII.4.4

7. BEM/DEF Linear unabhängige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ und Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ definieren **Parallelogramm**

$$S = \{c + \lambda \cdot a + \mu \cdot b : \lambda, \mu \in [0,1]\}.$$

Die **Flächeninhalt** von S ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(S) &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \sphericalangle(a,b) \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \left(1 - \cos^2\left(\arccos \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}\right)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \langle a,b\rangle^2} \\ &= \|a \times b\|.\end{aligned}$$

8. BEM Zerlegung von Q gem. Def. §1.1.
Für Teilquader Q_j mit unterer linker Ecke $\big(u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\big)$ und Kantenlängen $\Delta u^{(j)}$, $\Delta v^{(j)}$ seien

$$\begin{aligned}c^{(j)} &= g\big(u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\big), \\ a^{(j)} &= \Delta u^{(j)} \cdot g_u\big(u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\big), \\ b^{(j)} &= \Delta v^{(j)} \cdot g_v\big(u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\big).\end{aligned}$$

Für $\left(u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\right) \in \mathring{Q}$ ergibt sich Parallelogramm

$$S^{(j)} = \left\{c^{(j)} + \lambda \cdot a^{(j)} + \mu \cdot b^{(j)} : \lambda, \mu \in [0,1]\right\}$$

innerhalb der Tangentenebene an S im Punkt $g\left(u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\right)$. Dessen Flächeninhalt

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}\big(S^{(j)}\big) &= \Delta u^{(j)} \cdot \Delta v^{(j)} \cdot \|g_u^{(j)} \times g_v^{(j)}\| \\ &= \operatorname{vol}(Q^{(j)}) \cdot \|g_u^{(j)} \times g_v^{(j)}\|.\end{aligned}$$

Summation über alle(!) Teilquader

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}(Q^{(j)}) \cdot \|g_u^{(j)} \times g_v^{(j)}\|.$$

Folge von Zerlegungen von Q, deren Feinheiten gegen Null konvergieren. Dann Konvergenz der Summen gegen

$$\int_Q \|g_u(u,v) \times g_v(u,v)\| \, d(u,v),$$

da $(u,v) \mapsto \|g_u(u,v) \times g_v(u,v)\|$ stetig auf Q.

Dies motiviert die folgende Definition.

9. DEF Flächeninhalt $\mathfrak{O}(S)$ des Flächenstücks $S = g(Q)$ mit Parameterdarstellung $g\big|_Q$

$$\mathfrak{O}(S) = \int_Q \|g_u(u,v) \times g_v(u,v)\| \, d(u,v).$$

Oberflächenintegral der stetigen Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ über S

$$\int_S f(x)\, dx = \int_Q f \circ g(u,v) \cdot \|g_u(u,v) \times g_v(u,v)\| \, d(u,v).$$

10. BSP Flächeninhalt der Sphäre mit Radius $r > 0$, siehe Bsp. 4. Für $(u,v) \in Q$ sind $g_u(u,v)$ und $g_v(u,v)$ orthogonal. Weiter

$$\|g_u(u,v)\| = r \sin v, \qquad \|g_v(u,v)\| = r.$$

Also

$$\|g_u(u,v) \times g_v(u,v)\| = r^2 \cdot \sin v$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(S) &= \int_Q r^2 \cdot \sin v \, d(u,v) \\ &= r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin v \, dv \, du = 4\pi \cdot r^2.\end{aligned}$$

11. BSP Rotationsflächen

Gegeben

$$r : [u_1, u_2] \to [0, \infty[\quad \text{stetig diff'bar}$$

mit

$$\forall\, u \in\,]u_1, u_2[\, : \quad r(u) > 0.$$

Setze

$$Q = [u_1, u_2] \times [0, 2\pi], \qquad g(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ r(u) \cos v \\ r(u) \sin v \end{pmatrix}.$$

Klar: $g\big|\mathring{Q}$ injektiv. Weiter

$$g_u(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ r'(u) \cdot \cos v \\ r'(u) \cdot \sin v \end{pmatrix}, \quad g_v(u, v) = r(u) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix},$$

so daß $g_u(u, v)$ und $g_v(u, v)$ orthogonal und für $(u, v) \in \mathring{Q}$ linear unabhängig sind. Schließlich

$$\|g_u(u, v) \times g_v(u, v)\| = r(u) \cdot \sqrt{1 + \big(r'\big)^2(u)}.$$

Fazit: Flächeninhalt der Rotationsfläche $S = g(Q)$ mit Parameterdarstellung $g\big|_Q$

$$\mathfrak{O}(S) = \int_Q r(u) \cdot \sqrt{1 + \big(r'\big)^2(u)}\, d(u,v)$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} r(u) \cdot \sqrt{1 + \big(r'\big)^2(u)}\, du\, dv$$
$$= 2\pi \cdot \int_{u_1}^{u_2} r(u) \cdot \sqrt{1 + \big(r'\big)^2(u)}\, du$$

Speziell: **Kegelstumpf**, gegeben durch $0 \le u_1 < u_2$ und

$$r(u) = \alpha \cdot u$$

mit $\alpha > 0$. Hier

$$\mathfrak{O}(S) = 2\pi \cdot \int_{u_1}^{u_2} \alpha \cdot u \cdot \sqrt{1 + \alpha^2}\, du$$
$$= \pi \cdot \alpha\sqrt{1 + \alpha^2} \cdot (u_2^2 - u_1^2).$$