Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
08. Juli 2006

Klausur zur Mathematik II für BI, BI(WI), MaWi, AngGeo, VI

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in dieses Deckblatt einlegen und mit diesem persönlich abgeben.

Name: __________________

Vorname: __________________

Matrikelnummer: __________________

Fachrichtung: __________________

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	24	12	14	14	64	
err. Punktzahl						

Hilfsmittel: *Es sind außer der ausgeteilten Formelsammlung keine Hilfsmittel zugelassen.*

Geben Sie bitte **sämtliche** *Zwischenergebnisse bei der Lösung der Aufgaben an. Rechnen Sie, wenn nicht anders verlangt, mit Brüchen, Wurzeln usw.*

Aufgabe 1 (24 Punkte)

Kreuzen Sie das erste Kästchen (r) an, falls die Aussage richtig ist. Ist die Aussage falsch, so kreuzen Sie das zweite Kästchen (f) an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Eine nicht bearbeitete Aussage wird mit null Punkten bewertet. Die niedrigst mögliche Gesamtpunktzahl ist 0.

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Eigenwerte von A.

r	f	
☐	☐	λ ist Eigenwert von A^T
☐	☐	λ ist Eigenwert von $-A$
☐	☐	u Eigenvektor zu λ und v Eigenvektor zu $\mu \Rightarrow u$ und v sind linear unabhängig
☐	☐	$\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Eigenvektor von } A\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^n$

(b) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

r	f	
☐	☐	Rang $A = m \Rightarrow$ das LGS $Ax = 0$ ist lösbar
☐	☐	Rang $A < n \Rightarrow$ das LGS $Ax = b$ ist lösbar
☐	☐	Rang $A = n \Rightarrow$ das LGS $Ax = b$ ist eindeutig lösbar
☐	☐	$\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$

(c) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})^T_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^3$.

r	f	
☐	☐	$(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x = (x_1, x_2, x_3)^T \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = x_2$
☐	☐	$(x_3^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x_3 \Rightarrow (x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
☐	☐	$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x)$
☐	☐	$\left((n, \frac{1}{n})^T\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

(d) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n,n}$ Matrizen.

r	f	
☐	☐	$ABC = ACB$
☐	☐	$A(BC) = (AB)C$
☐	☐	$A^T B^T = (AB)^T$
☐	☐	$(A + B)C = AC + BC$

(e) Es sei V ein Vektorraum, $x, y, z \in V$ und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

r	f	
☐	☐	x, y, z linear unabhängig $\Rightarrow x + y, y, z$ linear unabhängig
☐	☐	x, y, z linear unabhängig $\Rightarrow \dim(\mathrm{Lin}\{x, y, z\}){=}3$
☐	☐	$\varphi(x) = y,\ \varphi(y) = z,\ \varphi(z) = x \Rightarrow \varphi$ ist surjektiv
☐	☐	φ injektiv, A eine Abbildungsmatrix von $\varphi \Rightarrow \mathrm{Kern}(A){=}\ \{0\}$

(f) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.

r	f	
☐	☐	f ist partiell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
☐	☐	f, g sind stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow J_{f\circ g}(x_0) = J_f(g(x_0)) \cdot J_g(x_0)$.
☐	☐	$m = 1$, H_f positiv definit $\Rightarrow f$ hat lokales Minimum.
☐	☐	f und g sind stetig $\Rightarrow f \circ g$ ist stetig.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob das LGS $Ax = b_1$ bzw. $Ax = b_2$ lösbar ist. Geben Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge an.

(b) Bestimmen Sie ein LGS, das die Ebene

$$E = \{x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

als Lösungsmenge hat. Geben Sie weiter die Hesse-Normalform der Ebene an.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema.

(b) Untersuchen Sie f auf globale Extrema.

Aufgabe 4 (14 Punkte)

(a) Gegeben sei für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & t & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 2t & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters t.

(b) Für $t = 2$ sind die Eigenwerte der Matrix $1, 2, 3$ und 4. Ist die Matrix A in diesem Fall diagonalähnlich? Berechnen Sie alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

(c) Wir betrachten die Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung φ, die durch $\varphi(b_1) = b_2$, $\varphi(b_2) = b_1 + b_2$ und $\varphi(b_3) = b_3$ (eindeutig) definiert ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der natürlichen Basis.

Hinweis: Die Matrix

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal.