Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2005/2006
22. April 2006

Nachklausur zur Mathematik I für BI, BI(WI), MaWi, AngGeo, VI

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in dieses Deckblatt einlegen und mit diesem persönlich abgeben.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	20	12	11	9	8	60	
err. Punktzahl							

Hilfsmittel: *Es sind außer der ausgeteilten Formelsammlung keine Hilfsmittel zugelassen.*

Geben Sie bitte **sämtliche** *Zwischenergebnisse bei der Lösung der Aufgaben an. Rechnen Sie, wenn nicht anders verlangt, mit Brüchen, Wurzeln usw.*

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Kreuzen Sie das erste Kästchen (r) an, falls die Aussage richtig ist. Ist die Aussage falsch, so kreuzen Sie das zweite Kästchen (f) an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Eine nicht bearbeitete Aussage wird mit null Punkten bewertet. Die niedrigst mögliche Gesamtpunktzahl ist 0.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D(f) = [a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

r f

☐ ☐ f integrierbar $\Rightarrow$ f stetig

☐ ☐ f stetig $\Rightarrow$ f differenzierbar

☐ ☐ f integrierbar $\Rightarrow$ f beschränkt

☐ ☐ f besitzt eine Stammfunktion $\Rightarrow$ f integrierbar

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

r f

☐ ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

☐ ☐ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

☐ ☐ $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

☐ ☐ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D(f) = \mathbb{R}$.

r f

☐ ☐ f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

☐ ☐ $\forall\, x \in D(f)\ \exists\, y \in \mathbb{R} : f(x) = y \Rightarrow f$ surjektiv

☐ ☐ f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend $\Rightarrow$ f injektiv

☐ ☐ f surjektiv $\Rightarrow$ f nicht beschränkt

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq 0$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D(f) = [a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

r f

☐ ☐ f streng monoton wachsend

☐ ☐ f monoton fallend

☐ ☐ $\dfrac{1}{f}$ differenzierbar

☐ ☐ f injektiv

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $D(f) = [a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

r f

☐ ☐ $f'(a) = 6$ und $f'(b) = -100 \Rightarrow \exists\, x \in (a, b) : f'(x) = -42$

☐ ☐ $\forall\, x \in D(f) : |f'(x)| < 1 \Rightarrow |f(a) - f(b)| < |a - b|$

☐ ☐ f' stetig

☐ ☐ f gleichmäßig stetig

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Erinnerung: $\cot = \frac{\cos}{\sin}$.

(a) Wie lautet der Definitionsbereich $D(\cot)$ der Kotangensfunktion cot?

(b) In welchen Punkten $x \in D(\cot)$ ist die Kotangensfunktion differenzierbar (mit Beweis)? Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in D(\cot)$ mit $\cot(x) = 1$ (ohne Beweis).

(d) Begründen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass für das Bild der Kotangensfunktion $B(\cot) = \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

(a) Berechnen Sie

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion.

(c) Bestimmen Sie (mit Beweis)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	0	-2	1	3

Bestimmen Sie an der Stelle $x = 0$ den Wert des Interpolationspolynoms höchstens 3. Grades, das durch diese Punkte geht.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \ln(x)$$

für $x \in D(f) =]0, \infty[$.

(a) Zeigen Sie für $x \in]0, 1[$ die Ungleichung

$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1,$$

indem Sie auf dem Intervall $[x, 1]$ den Mittelwertsatz auf f anwenden.

(b) Zeigen Sie für $x \in]1, \infty[$ die Ungleichung

$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1,$$

indem Sie auf dem Intervall $[1, x]$ den Mittelwertsatz auf f anwenden.