Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
29. Juni 2006

7. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Gershgorin-Kreise)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & 2 & -i & 3+4i \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere die zur Matrix A gehörigen Gershgorin-Kreise in der komplexen Zahlenebene.

(b) Berechne die Eigenwerte von A und zeichne sie in die Skizze ein.

Aufgabe G27 (Gershgorin-Kreise)

(a) Beweise die folgende Verschärfung des Satzes aus der Vorlesung:

> **Satz:** *Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebig.*
> *Es gilt*
> $$\sigma(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i'\right),$$
> *mit*
> $$K_i = \left\{\mu \in \mathbb{C} \,:\, |\mu - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\right\}, \quad i = 1,\dots,n \quad \textit{und}$$
> $$K_i' = \left\{\mu \in \mathbb{C} \,:\, |\mu - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ji}|\right\}, \quad i = 1,\dots,n.$$

(b) Skizziere die Menge $(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i')$ für die Matrix aus Aufgabe G 26.

Aufgabe G28 (Vektoriteration nach von Mises)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führe drei Iterationen nach von Mises mit dem Startvektor $z^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ durch (d. h. berechne $z^{(3)}$ und $R(z^{(2)}, A)$). Verwende zur Normierung die Maximumsnorm.

(b) Berechne die Eigenwerte von A und vergleiche diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).