Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
14. Juli 2006

# 7. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

## Gruppenübung

**Aufgabe G26** (Gershgorin-Kreise)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & 2 & -i & 3+4i \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere die zur Matrix $A$ gehörigen Gershgorin-Kreise in der komplexen Zahlenebene.

(b) Berechne die Eigenwerte von $A$ und zeichne sie in die Skizze ein.

**Lösung:**

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 4 - 5i| \le 8\}, \\ K_2 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \le 4\}, \\ K_3 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \le 2\}, \\ K_4 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 12| \le 0\} = \{12\}. \end{aligned}$$

Skizze siehe Abbildung 1.

(b) Die Eigenwerte $\lambda_1 = 4+5i$ und $\lambda_2 = 12$ lassen sich sofort ablesen. Für die mittlere Blockmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ und daraus die Eigenwerte $\lambda_3 = i$ und $\lambda_4 = -i$. Skizze siehe Abbildung 1.

**Aufgabe G27** (Gershgorin-Kreise)

(a) Beweise die folgende Verschärfung des Satzes aus der Vorlesung:

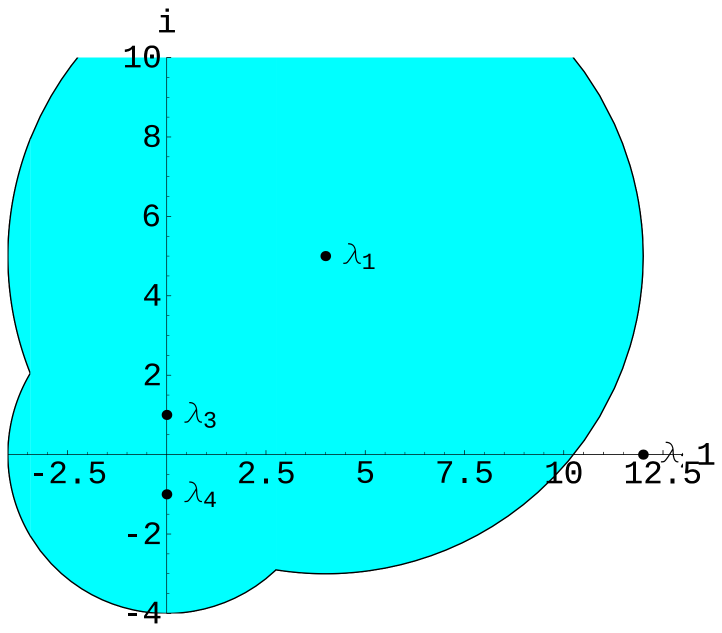


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe G26

> **Satz:** *Es sei* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *beliebig.*
> *Es gilt*
> $$\sigma(A) \subset \left( \bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n} K_i' \right),$$
> *mit*
> $$\begin{aligned} K_i &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \textit{und} \\ K_i' &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}| \right\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

(b) Skizziere die Menge $(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i')$ für die Matrix aus Aufgabe G 26.

**Lösung:**

(a) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ beliebig. Die Anwendung des Satzes über die Gershgorinkreise aus der Vorlesung auf $A$ und $A^T$ liefert

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\} = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

bzw.

$$\sigma(A^T) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}| \right\} = \bigcup_{i=1}^{n} K_i'.$$

Damit folgt aus $\sigma(A) = \sigma(A^T)$

$$\sigma(A) = \sigma(A) \cap \sigma(A^T) = \left( \bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n} K_i' \right).$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} K_1' &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 4 - 5i| \leq 0\} = \{4 + 5i\}, \\ K_2' &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq 3\}, \\ K_3' &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq 2\}, \\ K_4' &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 12| \leq 9\}. \end{aligned}$$

Skizze siehe Abbildung 2.

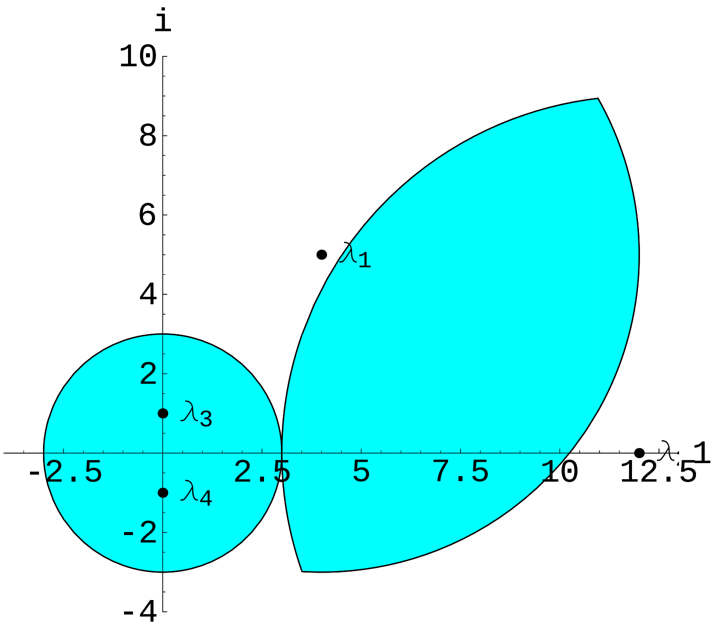


Abbildung 2: Skizze zur Aufgabe G27

**Aufgabe G28** (Vektoriteration nach von Mises)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führe drei Iterationen nach von Mises mit dem Startvektor $z^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ durch (d. h. berechne $z^{(3)}$ und $R(z^{(2)}, A)$). Verwende zur Normierung die Maximumsnorm.

(b) Berechne die Eigenwerte von $A$ und vergleiche diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).

**Lösung:**

(a) Für die Vektoriteration nach von Mises gilt

$$z^{(k+1)} = \frac{Az^{(k)}}{\|Az^{(k)}\|}.$$

Dies ergibt die folgenden Werte:

| $k$ | $Az^{(k)}$ | $\|Az^{(k)}\|_\infty$ | $z^{(k+1)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $(-1, 2, 2)^T$ | 2 | $(-\frac{1}{2}, 1, 1)^T$ |
| 1 | $(-\frac{7}{2}, 4, 5)^T$ | 5 | $(-\frac{7}{10}, \frac{4}{5}, 1)^T$ |
| 2 | $(-\frac{5}{2}, \frac{13}{5}, \frac{19}{5})^T$ | $\frac{19}{5}$ | $(-\frac{25}{38}, \frac{13}{19}, 1)^T$ |

Daraus folgt

$$R(z^{(2)}, A) = \frac{(z^{(2)})^T Az^{(2)}}{(z^{(2)})^T z^{(2)}} \approx 3.5822.$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

Daher hat $A$ die Eigenwerte 1, 2 und 3. Die Vektoriteration nach von Mises approximiert den größten Eigenwert. Nach drei Iterationen ist die Approximation aber noch relativ schlecht.