Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006
29. Juni 2006

6. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G23 (Quadriken)

Für die Quadrik Q gelte
$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0\},$$
Welche geometrischen Objekte treten für $n = 2$ und $n = 3$ auf, wenn alle λ_i ungleich Null sind?

Aufgabe G24 (Definitheit)

Untersuche, ob die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit sind.

Aufgabe G25 (Choleskyzerlegung)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 12 \\ 0 & 12 & 41 \end{pmatrix}.$$
Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (-1, 10, 41)^T$.

Hausübung

Aufgabe H21 (Degenerierte Quadriken im $\mathbb{R}^3$) (4 Punkte)

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1\}.$$

Welche geometrischen Objekte treten auf, wenn mindestens eins der λ_i gleich Null ist?

Aufgabe H22 (Quadriken & Relativitätstheorie) (6 Punkte)

(a) In der Raumzeit ($\mathbb{R}^4$) wird die folgende 'Metrik' benutzt

$$s(t, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2}.$$

i. Warum ist dies keine Metrik im Sinne der Vorlesung?

ii. Ein Punkt in der Raumzeit kann von einem Lichtstrahl, der im Ursprung $(0, 0, 0, 0)$ startet, genau dann erreicht werden, wenn dessen Abstand zum Ursprung Null ist. Wie sieht die Menge aller solcher Punkte geometrisch aus? Welche geometrische Form hat die Menge aller Punkte, die von einem solchen Lichtstrahl zur Zeit 1 erreicht werden kann?

(b) Für die relativistische Energie E eines Teilchens gilt die Gleichung

$$E^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2 + m_0^2 c^4.$$

Hierbei sind p_1, p_2, p_3 die drei Komponenten des Impulses, m_0 die Ruhemasse und c die Lichtgeschwindigkeit. Angenommen die Ruhemasse sei konstant.

i. Wie sieht die Menge aller möglichen Konfigurationen für (E, p_1, p_2, p_3) aus?

ii. Ersetze die drei Impulskomponenten p_1, p_2, p_3 möglichst sinnvoll durch eine Komponente $r(p_1, p_2, p_3)$. Wie sieht die Menge aller möglichen Konfigurationen für (E, r) aus?

Aufgabe H23 (Definitheit) (6 Punkte)

Untersuche, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit sind.

Aufgabe H24 (Choleskyzerlegung) (10 Punkte)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Aufgabe H25 (Lineare Gleichungssysteme) (16 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

Hinweis: Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von α zu unterscheiden. Bei einem der Fälle ist die Formel $\alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$ (3. binomische Formel) hilfreich.

Empfehlung: Benutze den Gaußalgorithmus.

Wichtige Bemerkung: Diese Aufgabe ist eine Wiederholung und behandelt eines der *grundlegensten* Themen der linearen Algebra. Wer mit der Lösung noch Problemen hat, sollte – auch im Hinblick auf die Klausur – *unbedingt* den Abschnitt über lineare Gleichungssysteme und den Gaußalgorithmus nochmal durcharbeiten.