Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
14. Juli 2006

6. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G23 (Quadriken)

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0\},$$

Welche geometrischen Objekte treten für $n = 2$ und $n = 3$ auf, wenn alle λ_i ungleich Null sind?

Lösung: Sei zunächst $n = 2$. Dann lautet die definierende Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0.$$

Für den Fall, daß $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ gilt, ist der Punkt $(0, 0)$ die einzige Lösung. Folglich ist die Quadrik Q nur ein Punkt.

Für den Fall $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ (bzw. $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$) definiere $a := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$ und $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{x_2^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1. \end{aligned}$$

Folglich besteht die Quadrik Q aus zwei Geraden mit der Steigung $\pm\frac{b}{a}$. Dies sind gerade die Asymptoten, der Hyperbeln, die sich ergeben, wenn die rechte Seite der definierenden Gleichung gleich Eins ist.

Sei nun $n = 3$. Dann lautet die definierende Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0.$$

Für den Fall, daß alle λ_i das gleiche Vorzeichen besitzen, ist der Punkt $(0, 0, 0)$ die einzige Lösung. Folglich ist die Quadrik Q nur ein Punkt.

Für den Fall, daß die λ_i unterschiedliche Vorzeichen besitzen, betrachten wir den Fall $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und $\lambda_3 < 0$ und definieren $a := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$, $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$ und $c := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}$. (Die übrigen Fälle können durch Umnummerierung auf diesen zurückgeführt werden.) Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{x_3^2}{c^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}} = \frac{|x_3|}{c} \end{aligned}$$

Folglich ist die Quadrik Q ein Doppelkegel mit elliptischer Grundfläche. Es ist genau der asymptotische Kegel, der Hyperboloide, die sich ergeben, wenn die rechte Seite der definierenden Gleichung gleich Eins ist.

Aufgabe G24 (Definitheit)

Untersuche, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit sind.

Lösung: Für die Matrix A gilt

$$\begin{aligned} & \det(a_{11}) = \det(3) = 3 > 0, \\ & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 15 - 4 = 11 > 0 \text{ und} \\ & \det(A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -4(12 - 0) + 9(15 - 4) = -48 + 99 = 51 > 0. \end{aligned}$$

Daher ist A *positiv definit.*

Die Eigenwerte von B sind $-2 - \sqrt{2}$, -2, $-2 + \sqrt{2}$ und 0. Da alle Eigenwerte kleiner oder gleich Null sind, ist B *negativ semidefinit.*

Die Matrix C besitzt offensichtlich den Eigenvektor $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ zum Eigenwert -1 und den Eigenvektor $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ zum Eigenwert 1. Daher ist C *indefinit.*

Aufgabe G25 (Choleskyzerlegung)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 12 \\ 0 & 12 & 41 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (-1, 10, 41)^T$.

Lösung: Zuerst prüfen wir, ob die Matrix positiv definit ist. Dazu berechnen wir die Eigenwerte, z. B. mit Hilfe der Hauptminoren:

$$\begin{aligned} &\det(a_{11}) = \det(1) = 1 > 0, \\ &\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} = 13 - 4 = 9 > 0 \text{ und} \\ &\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 12 \\ 0 & 12 & 41 \end{pmatrix} = 13 \cdot 41 - 12^2 - 2(2 \cdot 41 - 0) = -9 \cdot 41 + 144 = 225 > 0. \end{aligned}$$

Folglich ist A positiv definit und damit ist eine Choleskyzerlegung möglich. Dieser Test auf positive Definitheit kann implizit in den Algorithmus eingebaut werden. Man stoppt dabei, falls einer der Ausdrücke $a_{ii} - r_{1i}^2 - \ldots - r_{(i-1)i}^2$ nicht positiv ist. Dann ist die Matrix nicht positiv definit.

Wir berechnen nun nacheinander die Zeilen von R:

Erste Zeile: $r_{11}^2 = 1$, $r_{11}r_{12} = 2$ und $r_{11}r_{13} = 0$.
Folglich gilt $r_{11} = 1$, $r_{12} = \frac{2}{1} = 2$ und $r_{13} = \frac{0}{11} = 0$.

Zweite Zeile: $r_{12}^2 + r_{22}^2 = 13$ und $r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} = 12$.
Folglich gilt $r_{22} = \sqrt{13 - 2^2} = 3$ und $r_{23} = \frac{12-2\cdot 0}{3} = 4$.

Dritte Zeile: $r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 41$.
Folglich gilt $r_{33} = \sqrt{41 - 0 - 4^2} = 5$.

A besitzt also die Choleskyzerlegung $A = R^T R$, mit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des Gleichungssystem $Ax = b$ lösen wir zunächst $R^T y = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 & & \\ 2y_1 + 3y_2 &= 10 &\quad\Rightarrow\quad& y_2 = 4 \\ 4y_2 + 5y_3 &= 41 &\quad\Rightarrow\quad& y_3 = 5 \end{aligned}$$

Danach erhalten wir x als Lösung von $Rx = y$:

$$\begin{aligned} 5x_3 &= 5 &\quad\Rightarrow\quad& x_3 = 1 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 4 &\quad\Rightarrow\quad& x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 &\quad\Rightarrow\quad& x_1 = -1 \end{aligned}$$

Folglich ist $x = (-1, 0, 1)^T$ die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$.

Hausübung

Aufgabe H21 (Degenerierte Quadriken im $\mathbb{R}^3$) (4 Punkte)

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1\}.$$

Welche geometrischen Objekte treten auf, wenn mindestens eins der λ_i gleich Null ist?

Lösung: Sei $\lambda_3 = 0$. Dann taucht x_3 nicht mehr in der definierenden Gleichung auf und ist daher frei wählbar. In der x_1x_2-Ebene ergibt sich eine der zweidimensionalen Quadriken (Ellipse, Hyperbel, Parallelen oder die leere Menge). Folglich ist Q ein Zylinder mit eine der zweidimensionalen Quadriken als Grundfläche.

Aufgabe H22 (Quadriken & Relativitätstheorie) (6 Punkte)

(a) In der Raumzeit ($\mathbb{R}^4$) wird die folgende 'Metrik' benutzt

$$s(t, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2}.$$

i. Warum ist dies keine Metrik im Sinne der Vorlesung?

ii. Ein Punkt in der Raumzeit kann von einem Lichtstrahl, der im Ursprung $(0, 0, 0, 0)$ startet, genau dann erreicht werden, wenn dessen Abstand zum Ursprung Null ist. Wie sieht die Menge aller solcher Punkte geometrisch aus? Welche geometrische Form hat die Menge aller Punkte, die von einem solchen Lichtstrahl zur Zeit 1 erreicht werden kann?

(b) Für die relativistische Energie E eines Teilchens gilt die Gleichung

$$E^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2 + m_0^2c^4.$$

Hierbei sind p_1, p_2, p_3 die drei Komponenten des Impulses, m_0 die Ruhemasse und c die Lichtgeschwindigkeit. Angenommen die Ruhemasse sei konstant.

i. Wie sieht die Menge aller möglichen Konfigurationen für (E, p_1, p_2, p_3) aus?

ii. Ersetze die drei Impulskomponenten p_1, p_2, p_3 möglichst sinnvoll durch eine Komponente $r(p_1, p_2, p_3)$. Wie sieht die Menge aller möglichen Konfigurationen für (E, r) aus?

Lösung:

(a) i. Die Funktion s kann auch nichtreelle Werte annehmen zum Beispiel für $(t, x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0, 0)$. Daher ist sie keine Metrik im Sinne der Vorlesung.

ii. Es gilt

$$\begin{aligned} & 0 = s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & c^2t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \Leftrightarrow \quad & c|t| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Daher ist die Menge K der Punkte, die von dem Lichtstrahl erreicht werden kann, ein vierdimensionaler Kegel.

Die Menge S der Punkte die ein Lichtstrahl zum Zeitpunkt eins erreichen kann sind alle Punkte $(t, x_1, x_2, x_3)^T$ aus K mit $t = 1$ also gerade der Schnitt des Kegels K mit der Ebene $E = \{(t, x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^4 \mid t = 1\}$. Folgich ist S eine Kugeloberfläche mit Radius c.

(b) i. Es gilt

$$\begin{aligned} E^2 &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2 + m_0^2 c^4 \\ \Leftrightarrow \quad E^2 - c^2 p_1^2 - c^2 p_2^2 - c^2 p_3^2 &= m_0^2 c^4. \end{aligned}$$

Daher ist die Menger der möglichen Konfigurationen ein vierdimensionales Hyperboloid.

ii. Setze $r := \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2}$. Dann ist die Menge der möglichen Konfigurationen für (E, r) eine Hyperbel.

Aufgabe H23 (Definitheit) (6 Punkte)

Untersuche, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit sind.

Lösung: Die Matrix A hat die Eigenwerte -2, 2 und 4. Da die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben ist A *indefinit.*

Die Matrix B hat die Eigenwerte 0, $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, 2, $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, die alle größer oder gleich Null sind. Daher ist B *positiv semidefinit.*

Die Matrix C hat die Eigenwerte $-4-\sqrt{5}$, $-3-\sqrt{2}$, $-4+\sqrt{5}$, $-3+\sqrt{2}$, -1, -1, 0, die alle kleiner oder gleich Null sind. Daher ist C *negativ semidefinit.*

Aufgabe H24 (Choleskyzerlegung) (10 Punkte)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Lösung: Zuerst prüfen wir, ob die Matrix positiv definit ist. Dazu berechnen wir die Eigenwerte, z. B. mit Hilfe der Hauptminoren:

$$\begin{aligned} &\det(a_{11}) = \det(1) = 1 > 0, \\ &\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \text{ und} \\ &\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 4 - (3-2) - (-2+2) = 1 > 0. \end{aligned}$$

Folglich ist A positiv definit und damit ist eine Choleskyzerlegung möglich. Dieser Test auf positive Definitheit kann implizit in den Algorithmus eingebaut werden. Man stoppt dabei, falls einer der Ausdrücke $a_{ii} - r_{1i}^2 - \ldots - r_{(i-1)i}^2$ nicht positiv ist. Dann ist die Matrix nicht positiv definit.

Wir berechnen nun nacheinander die Zeilen von R:

Erste Zeile: $r_{11}^2 = 1$, $r_{11}r_{12} = 1$ und $r_{11}r_{13} = -1$.
Folglich gilt $r_{11} = 1$, $r_{12} = \frac{1}{1} = 1$ und $r_{13} = \frac{-1}{1} = -1$.

Zweite Zeile: $r_{12}^2 + r_{22}^2 = 2$ und $r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} = -2$.
Folglich gilt $r_{22} = \sqrt{2 - 1^2} = 1$ und $r_{23} = \frac{-2-1\cdot(-1)}{1} = -1$.

Dritte Zeile: $r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 3$.
Folglich gilt $r_{33} = \sqrt{3 - (-1)^2 - (-1)^2} = 1$.

A besitzt also die Choleskyzerlegung $A = R^T R$, mit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des Gleichungssystem $Ax = b$ lösen wir zunächst $R^T y = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 & & \\ y_1 + y_2 &= -1 & \Rightarrow \quad & y_2 = -1 \\ -y_1 - y_2 + y_3 &= 4 & \Rightarrow \quad & y_3 = 3 \end{aligned}$$

Danach erhalten wir x als Lösung von $Rx = y$:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 & & \\ x_2 - x_3 &= -1 & \Rightarrow \quad & x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 & \Rightarrow \quad & x_1 = 1 \end{aligned}$$

Folglich ist $x = (1, 2, 3)^T$ die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe H25 (Lineare Gleichungssysteme) (16 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

Hinweis: Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von α zu unterscheiden. Bei einem der Fälle ist die Formel $\alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$ (3. binomische Formel) hilfreich.

Empfehlung: Benutze den Gaußalgorithmus.

Wichtige Bemerkung: Diese Aufgabe ist eine Wiederholung und behandelt eines der *grundlegensten* Themen der linearen Algebra. Wer mit der Lösung noch Problemen hat, sollte – auch im Hinblick auf die Klausur – *unbedingt* den Abschnitt über lineare Gleichungssysteme und den Gaußalgorithmus nochmal durcharbeiten.

Lösung: Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & \alpha^2 & \alpha \end{array}\right) \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & \alpha^2-2 & \alpha-3 \end{array}\right) \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right).$$

Die Größe der Lösungsmenge hängt davon ab, ob der Ausdruck $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ gleich Null ist oder nicht. Daher unterscheiden wir drei Fälle:

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich kann eine Variable frei gewählt werden. Sei $x_3 = s$. Dann folgt $2x_2 - x_3 = -2$ also $x_2 = \frac{s-2}{2}$. Weiter folgt $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$ also $x_1 = 3 - (s-2) - 2s = 5 - 3s$. Daher gilt für die Lösungsmenge $L_{\alpha=1}$:

$$L_{\alpha=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5-3s \\ \frac{s-2}{2} \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Für $\alpha = -1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

In der letzten Zeile steht die nicht erfüllbare Gleichung $0 = -2$, womit die Lösungsmenge $L_{\alpha=-1}$ leer ist.

Für $\alpha \neq \pm 1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{\alpha-1}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\alpha+1}, \\ 2x_2 - x_3 &= -2 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2(\alpha+1)} - 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 5 - \frac{3}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Lösungsmenge $L_{\alpha\neq\pm1}$:

$$L_{\alpha\neq\pm1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - \frac{3}{\alpha+1} \\ \frac{1}{2(\alpha+1)} - 1 \\ \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \right\}$$