Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
30. Juni 2006

5. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Kurven 2. Ordnung)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Skizziere die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Lösung: Die Matrix A besitzt den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(1,1)^T$ und den Eigenwert 3 mit Eigenvektor $(-1,1)^T$. Seien $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$ die normierten Eigenvektoren. Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix für den Wechsel zur Orthonormalbasis e_1, e_2. Sei $d = C^T b = (0, -4)$. In der neuen Basis (mit neuer Variablen y) lautet die Gleichung dann

$$(Cy)^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

bzw.

$$y^T C^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

oder ausgeschrieben

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Um das Linearglied $-4y_2$ zu beseitigen, führt man eine quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2\right) + \frac{1}{3} &= y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} \\ &= y_1^2 + 3\left(y_2 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

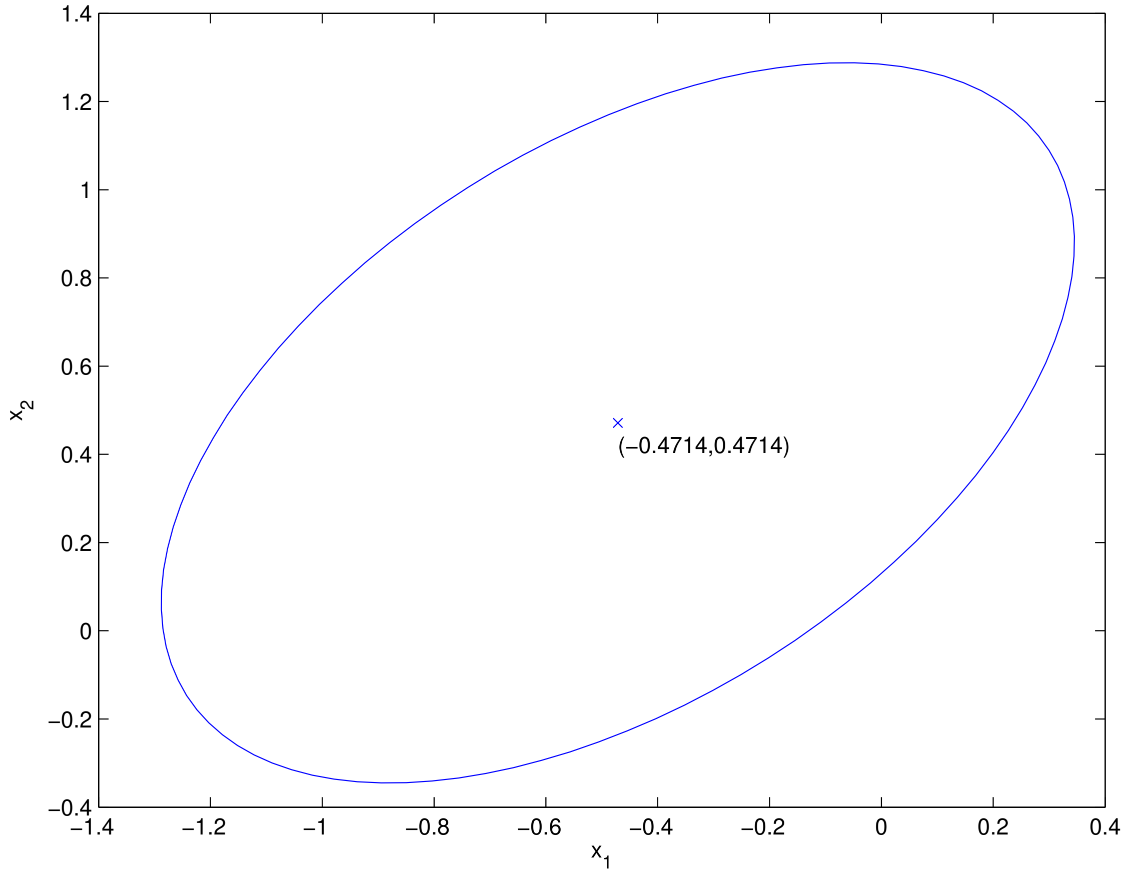

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe G20.

Setzt man nun $z_1 := y_1$ und $z_2 := y_2 - \frac{2}{3}$, dann lautet die Gleichung in den neuen Variablen

$$z_1^2 + 3z_2^2 = 1.$$

Folglich ist die Lösungsmenge eine *Ellipse*. Bezüglich der z-Koordinaten liegt das Zentrum im Nullpunkt. Daher liegt es bezüglich der y-Koordinaten im Punkt $(0, \frac{2}{3})$ und der x-Koordinaten im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Die Vektoren e_1 und e_2 geben die Richtung der Achsen der Ellipse an. Die Halbachsen haben die Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Skizze siehe Abbildung 20.

Aufgabe G21 (Flächen 2. Ordnung)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{3}{2}.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Lösung: Die Matrix A hat die Eigenwerte 2, 4 und -2 mit den normierten Eigenvektoren $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$ und $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Sei $C = (e_1, e_2, e_3)$ und $d = C^T b = (0, 4, 2)^T$.

In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 lautet die Gleichung dann:

$$2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 + 4y_2 + 2y_3 + \frac{3}{2} = 0.$$

Mit Hilfe zweier quadratischer Ergänzungen erhält man:

$$2y_1^2 + 4\left(y_2^2 + y_2 + \frac{1}{4}\right) - 1 - 2\left(y_3^2 - y_3 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2y_1^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(y_3 - \frac{1}{2}\right) + 1$$

Führt man neue Koordinaten $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + \frac{1}{2}$ und $z_3 := y_3 - \frac{1}{2}$ ein, ergibt sich die neue Gleichung

$$2z_1^2 + 4z_2^2 - 2z_3^2 = -1,$$

aus der sich ablesen läßt, daß es sich bei der Lösungsmenge um ein *zweischaliges Hyperboloid* handelt.

Aufgabe G22 (Norm)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle symmetrische Matrix, deren Eigenwerte alle echt größer als Null sind.

(a) Zeige, daß die Abbildung

$$N_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\langle x, Ax \rangle}$$

eine Norm ist.

(b) Wie sieht der Einheitskreis bezüglich N_A aus?

(c) Warum ist N_A keine Norm, wenn A einen negativen Eigenwert oder Null als Eigenwert besitzt?

Erinnerung: Eine Abbildung $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Norm wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) $N(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(b) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$,

(c) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Tipp: Finde Matrizen T und D, sodaß $A = T^T D^T D T$ gilt.

Lösung:

(a) Da A eine reelle symmetrische Matrix ist, existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Das heißt es gibt Matrizen T und $\tilde{D}$, sodaß $A = T^T \tilde{D} T$ gilt. Die Matrix $\tilde{D}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen. Da alle Eigenwerte positiv sind, läßt sich die Diagonalmatrix D mit den Diagonaleinträgen $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ definieren. Offensichtlich gilt dann $\tilde{D} = D^T D$. Da D und T invertierbar sind, ist auch DT invertierbar und definiert eine *bijektive* lineare Abbildung $\varphi : R^n \to R^n$.
Für das Skalarprodukt gilt $\langle x, y \rangle = x^T y$. Daraus folgt

$$N_A(x) = \sqrt{\langle x, Ax \rangle} = \sqrt{x^T A x} = \sqrt{x^T T^T D^T D T x} = \sqrt{(DTx)^T DTx} = \sqrt{\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle}.$$

Da $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm ist und φ bijektiv und linear, ist auch N_A eine Norm.

(b) Der Einheitskreis bezüglich N_A ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$\begin{aligned} & 1 = N_A(x) = \sqrt{x^T A x} && (1) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = x^T A x. && (2) \end{aligned}$$

Da alle Eigenwerte von A echt größer als Null sind, ist die Lösungsmenge ein Ellipsoid, wobei die Eigenvektoren die Richtung der Achsen beschreiben und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ die Längen der Halbachsen sind.

(c) Ist $\lambda < 0$ eine Eigenwert von A und v ein Eigenvektor dazu, dann ist

$$N(v) = \sqrt{\langle v, Av \rangle} = \sqrt{\langle v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda} \|v\| \notin \mathbb{R}$$

und daher N_A keine Norm.
Ist $\lambda = 0$ eine Eigenwert von A und v ein Eigenvektor dazu, dann ist $v \neq 0$ aber

$$N(v) = \sqrt{\langle v, Av \rangle} = \sqrt{\langle v, \lambda v \rangle} = 0$$

und folglich N_A keine Norm.

Hausübung

Aufgabe H19 (Kurven 2. Ordnung) (8 Punkte)

Sei $K = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ und $E = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. Dann ist K ein Doppelkegel und E eine Ebene. Von welchen Kurventyp ist die Schnittmenge $K \cap E$?

Lösung: Alle $(x_1, x_2, x_3) \in K \cap E$ erfüllen die Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Eliminiert man die Variable x_3, dann erhält man die Gleichung

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 - 1 = 0.$$

Mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

läßt sich die Gleichung auch in der Form

$$x^T A x + b^T x - 1 = 0$$

schreiben.

Die Matrix A hat die Eigenwerte 4 und -1 mit den normierten Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2 bezüglich der Basis aus Eigenvektoren lautet die Gleichung

$$4y_1^2 - y_2^2 - 2\sqrt{5} y_1 - 1 = 0.$$

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man

$$4y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 - y_2^2 - 1 = 4\left(y_1^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}y_1 + \frac{5}{16}\right) - \frac{5}{4} - y_2^2 - 1 = 4\left(y_1 - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - y_2^2 - \frac{9}{4}.$$

In den neuen Koordinaten $z_1 := y_1 - \frac{\sqrt{5}}{4}$, $z_2 := y_2$ lautet die Gleichung

$$4z_1^2 - z_2^2 - \frac{9}{4} = 0$$

bzw.

$$\frac{16}{9}z_1^2 - \frac{4}{9}z_2^2 = 1.$$

Daraus läßt sich ablesen, daß es sich bei der Schnittmenge um eine *Hyperbel* handelt.

Anmerkung: Je nachdem welche Variable am Anfang eliminiert wird, erhält man unterschiedliche Eigenwerte und Eigenvektoren. Das hat aber nur einen Einfluß auf die Kompliziertheit der Rechnung und nicht auf das Endergebnis. Der Kurventyp ist immer derselbe.

Aufgabe H20 (Flächen 2. Ordnung) (8 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2+6\sqrt{2} \\ 2+6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 20.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Lösung: Die Matrix A hat die Eigenwerte 3, 2 und 1 mit den normierten Eigenvektoren $e_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$ und $e_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Sei $C = (e_1, e_2, e_3)$ und $d = C^T b = (0, 12, -4)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 lautet die Gleichung dann:

$$3y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + 12y_2 - 4y_3 + 20 = 0.$$

Mit Hilfe zweier quadratischer Ergänzungen erhält man:

$$3y_1^2 + 2(y_2^2 + 6y_2 + 9) - 18 + (y_3^2 - 4y_3 + 4) - 4 + 20 = 3y_1^2 + 2(y_2+3)^2 + (y_3-2)^2 + -2$$

Führt man neue Koordinaten $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + 3$ und $z_3 := y_3 - 2$ ein, ergibt sich die neue Gleichung

$$3z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2$$

bzw.

$$\frac{3}{2}z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 = 1,$$

aus der sich ablesen läßt, daß es sich bei der Lösungsmenge um ein *Ellipsoid* mit den Halbachsen der Länge $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1 und $\sqrt{2}$ handelt.

Klausur

Die Klausur „Lineare Algebra für Ph-BSc“ findet

am Dienstag 25. Juli 2006
von 10.00 - 12.00 Uhr

statt. Es wird der Stoff der Veranstaltungen „Linearen Algebra I für Physiker“ und „Lineare Algebra II für Physiker“ geprüft.

Als Hilfsmittel sind *sämtliche Unterlagen* (Bücher, Skripte, eigene Aufzeichungen, ...) zugelassen. Es dürfen *keine Taschenrechner* benutzt werden.

Wichtig: Zur Teilnahme an der Klausur ist eine *Anmeldung* beim Zentralen Prüfungssekretariat erforderlich. *Anmeldeschluß* ist der 30. Juni 2006.