Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
2. Juni 2006

4. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Jordannormalform & Jordanbasis)

Bestimme jeweils eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G18 (Jordannormalform)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze die Eigenwerte 1 und -1. Gib eine Jordannormalform von A an für den Fall, daß

(a) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist,

(b) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische zwei ist,

(c) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische eins ist.

Aufgabe G19 (Minimalpolynom und Jordannormalform)

Die Matrix A besitze das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{s_r},$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden seien. Weiter sei b_i die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ_i und l_i^j die Größe des j-ten Jordanblocks zum Eigenwert λ_i.

Bestimme das Minimalpolynom von A.

Tipp: Für Blockmatrizen gilt

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H15 (Jordannormalform & Jordanbasis) (10 Punkte)

Bestimme eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H16 (Jordannormalform) (4 Punkte)

Zeige, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ keine Jordannormalform besitzt.

Aufgabe H17 (Die Exponentialfunktion für Matrizen) (4 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Berechne e^A.

Tipp: Für Matrizen D und N, die kommutieren, das heißt $DN = ND$, gilt

$$e^{D+N} = e^D e^N.$$

Die Exponentialfunktion für Matrizen ist definiert als

$$e^X := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}.$$

Aufgabe H18 (Der freie gedämpfte lineare Oszillator) (8 Punkte)

Die Bewegungsgleichung des freien gedämpften linearen Oszillators lautet

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0,$$

wobei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $m, \alpha, k > 0$ reelle Konstanten sind. Es soll der aperiodische Grenzfall betrachtet werden, das heißt $\alpha = 2\sqrt{km}$. Setzt man $v := \dot{x}$, erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{k}{m}} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems, das heißt berechne

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

für beliebige Anfangswerte $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und zur beliebigen Zeit $t \in \mathbb{R}$.