Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Mirjam Dür
Dipl. Math. Stefan Bundfuss

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
23. Juni 2006

4. Übungsblatt zur „Lineare Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Jordannormalform & Jordanbasis)

Bestimme jeweils eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{3. Zeile}}}{=} (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Folglich besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$, die jeweils die algebraische Vielfachheit zwei haben. Da die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleich vier ist, besitzt A eine Jordannormalform.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke der Größe eins.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 gilt

$$E_2 := \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_2 einen Jordanblock der Größe zwei.

Zum Bestimmen des noch fehlenden Basisvektors des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_2 ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystem ist

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ hätte auch das Verfahren aus der Vorlesung verwendet werden können. Dann hätte man nach der Berechnung von $\ker(A - \lambda_2 I)$

$$\ker(A - \lambda_2 I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

berechnet und festgestellt, daß $((0, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 1)^T)$ die fehlende Jordankette ist.

Für das charakteristische Polynom von B gilt

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\\text{nach der}\\\text{1. Zeile}}}{=} (-1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\\text{nach der}\\\text{3. Zeile}}}{=} (-1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)^4
\end{aligned}$$

Folglich besitzt B den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ mit der algebraischen Vielfachheit vier, womit B eine Jordannormalform besitzt.

Da B nur einen Eigenwert besitzt, gibt es auch nur einen verallgemeinerten Eigenraum, womit $V^{\lambda_1} = \mathbb{R}^4$ gilt.

Mit dem Verfahren aus der Vorlesung kommt man nun sehr schnell zum Ziel, da das Berechnen von $\ker(B+I)^j$ entfallen kann. Als Basis des verallgemeinerten Eigenraums zur Eigenwert -1 kann zum Beispiel die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ gewählt werden. Daraus lassen sich nun Jordanketten bilden.

Es sei

$$v_3 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 := (B+I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := (B+I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_0 := (B+I)v_1 = 0$$

Aus $v_0 = 0$ folgt, daß v_1 ein Eigenvektor ist und v_3 ein Hauptvektor der Stufe 3. Daher ist (v_1, v_2, v_3) eine Jordankette.

Weiter sei

$$w_1 := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_0 := (B+I)w_1 = 0$$

Aus $w_0 = 0$ folgt, daß w_1 ein Eigenvektor ist. Daher ist (w_1) eine Jordankette. Allerdings sind v_1 und w_1 linear abhängig, weshalb die Jordankette (w_1) gleich wieder verworfen werden kann.

Nun sei

$$u_2 := e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 := (B+I)u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_0 := (B+I)u_1 = 0$$

Aus $u_0 = 0$ folgt, daß u_1 ein Eigenvektor ist. Daher ist (u_1, u_2) eine Jordankette.

Die Vektoren $(v_1, v_2, v_3, u_1, u_2)$ bilden offensichtlich ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Allerdings bilden sie keine Basis. Deshalb müssen die Ketten noch verkürzt werden: Es gilt $v_1 - u_1 = 0$. Folglich kann die Kette (u_1, u_2) verkürzt werden. Es sei

$$\tilde{u}_1 := u_2 - v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\tilde{u}_1)$ eine Jordankette.

Da v_1 und $\tilde{u}_1$ linear unabhängig sind, sind auch $v_1, v_2, v_3, \tilde{u}_1$ linear unabhängig und daher

$$(v_1, v_2, v_3, \tilde{u}_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von B und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ ist auch die folgende Rechnung möglich: Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(B - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke.

Zum Bestimmen der noch fehlenden Basisvektoren des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_1 ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(B - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen einen Vektor $v_2 = (0,0,0,-\frac{1}{2}) \in L_1$ und lösen das Gleichungssystem

$$(B - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = v_2. \tag{1}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_2 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Wichtige Anmerkung: Bei der Wahl von v_2 hatten wir das Glück, daß das Gleichungssystem 1 eine Lösung hatte und den fehlenden Basisvektor lieferte. Für ein systematisches Suchen des fehlenden Basisvektors, hätte man das Gleichungssystem

$$(B - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

mit den Unbekannten $v \in \mathbb{R}^3$ und $s,t \in \mathbb{R}$ lösen können.

Aufgabe G18 (Jordannormalform)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze die Eigenwerte 1 und -1. Gib eine Jordannormalform von A an für den Fall, daß

(a) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist,

(b) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische zwei ist,

(c) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist und die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische eins ist.

Lösung: Aus den Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich die folgenden Informationen über die Jordanblöcke ablesen:

- Ist die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleich der Raumdimension, dann existiert eine Jordannormalform.
- Die algebraische Vielfachheit ist die Summe der Größen der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.
- Die geometrische Vielfachheit ist die Anzahl der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.

Damit folgt:

(a) Eine Jordannormalform J von A besitzt zu jedem Eigenwert zwei Jordanblöcke der Größe eins, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und zwei Jordanblöcke zum Eigenwert -1 der Größe eins bzw. zwei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und einen Jordanblock zum Eigenwert -1 der Größe drei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G19 (Minimalpolynom und Jordannormalform)

Die Matrix A besitze das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{s_i},$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden seien. Weiter sei b_i die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ_i und l_i^j die Größe des j-ten Jordanblocks zum Eigenwert λ_i.

Bestimme das Minimalpolynom von A.

Tipp: Für Blockmatrizen gilt

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Lösung: Vom letzten Übungsblatt ist bekannt, daß der Jordanblock

$$M_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

das Minimalpolynom $\mu_{M_\alpha}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$ besitzt.

Sei J eine Jordannormalform von A. Da J und A ähnlich sind, besitzen sie dasselbe Minimalpolynom. Deshalb genügt es J zu betrachten.

Betrachte zunächst den Fall $r = 1$. Dann gilt $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^n$. Jeder Jordanblock J_j von A hat dann das Minimalpolynom $\mu_{J_j}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1^j}$ $(j \in \{1, \ldots, b_1\})$. Weiter gilt

$$(J - \lambda_1 I)^k = \begin{pmatrix} J_1 - \lambda_1 I_{l_1^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{b_1} - \lambda_1 I_{l_1^{b_1}} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (J_1 - \lambda_1 I_{l_1^1})^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (J_{b_1} - \lambda_1 I_{l_1^{b_1}})^k \end{pmatrix},$$

wobei $I_{l_1^j}$ die Einheitsmatrix der Größe l_i^j ist. Daraus folgt, daß $k = m_1 := \max_{j\in\{1,\ldots,b_1\}} l_1^j$ das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $(J - \lambda_1 I)^k = 0$ ist. Folglich ist $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}$ das Minimalpolynom von A.

Um das Minimalpolynom für beliebige $r \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, soll als nächstes gezeigt werden, daß $M_\alpha^k \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt aus

$$\det(M_\alpha^k) = (\det(M_\alpha))^k = (\alpha^n)^k = \alpha^n k \neq 0.$$

Damit folgt für den allgemeinen Fall

$$\mu_A = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{m_i} \quad \text{mit } m_i := \max_{j\in\{1,\ldots,b_i\}} l_i^j.$$

Hausübung

Aufgabe H15 (Jordannormalform & Jordanbasis) (10 Punkte)

Bestimme eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Zunächst sind die Eigenwerte von A zu bestimmen. Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{4. Zeile}}}{=} (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} - \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1) + ((1-\lambda)(3-\lambda)+1)\right]$$
$$= (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1)^2 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 = (2-\lambda)(\lambda-2)^4$$
$$= (2-\lambda)^5$$

Folglich besitzt A den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit fünf, womit A eine Jordannormalform besitzt.

Da A nur einen Eigenwert besitzt, gibt es auch nur einen verallgemeinerten Eigenraum, womit $V^{\lambda_1} = \mathbb{R}^5$ gilt.

Mit dem Verfahren aus der Vorlesung kommt man nun sehr schnell zum Ziel, da das Berechnen von $\ker(A-2I)^j$ entfallen kann. Als Basis des verallgemeinerten Eigenraums zur Eigenwert 2 kann zum Beispiel die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ gewählt werden. Daraus lassen sich nun Jordanketten bilden.

Es sei

$$v_3 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 := (A-2I)v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := (A-2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_0 := (A-2I)v_1 = 0$$

Aus $v_0 = 0$ folgt, daß v_1 ein Eigenvektor ist und v_3 ein Hauptvektor der Stufe 3. Daher ist (v_1, v_2, v_3) eine Jordankette.

Weiter sei

$$w_2 := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_1 := (A - 2I)w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_0 := (A - 2I)w_1 = 0$$

Aus $w_0 = 0$ folgt, daß w_1 ein Eigenvektor ist und w_2 ein Hauptvektor der Stufe 2. Daher ist (w_1, w_2) eine Jordankette.

Da v_1 und w_1 linear unabhängig sind, sind auch v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 linear unabhängig und daher

$$(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ hätte auch folgende Rechnung zum Ziel geführt: Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke.

Zum Bestimmen der noch fehlenden Basisvektoren des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_1 sind zwei Jordanketten zu finden. Wir lösen zunächst das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um zu testen, ob sich die Jordankette fortsetzen läßt betrachte das Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = v_1 + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich besitzt das Gleichungssystem keine Lösung und die Jordankette ist nicht weiter fortsetzbar.

Wir wählen einen Vektor $v_2 = (0,-1,0,0,0) \in L_1$ und erhalten die Jordankette (v_1, v_2).

Nun ist noch eine Jordankette der Länge drei zu finden mit $w_1 = (0,1,0,1,0)^T$ als ersten Vektor. Dazu ist zunächst das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = w_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_2 := \left\{ s\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen (auf gut Glück) $w_2 := (1,-1,0,0,1) \in L_2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = w_2.$$

Der Vektor $w_3 := (-1,1,0,0,0)^T$ ist eine Lösung des obigen Gleichungssystems. Folglich ist (w_1, w_2, w_3) eine Jordankette und

$$(v_1, v_2, w_1, w_2, w_3) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Aufgabe H16 (Jordannormalform) (4 Punkte)

Zeige, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ keine Jordannormalform besitzt.

Lösung: Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Folglich besitzt A keine reellen Eigenwerte und daher auch keine Jordannormalform in $\mathbb{R}$.

Aufgabe H17 (Die Exponentialfunktion für Matrizen) (4 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Berechne e^A.

Tipp: Für Matrizen D und N, die kommutieren, das heißt $DN = ND$, gilt

$$e^{D+N} = e^D e^N.$$

Die Exponentialfunktion für Matrizen ist definiert als

$$e^X := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}.$$

Lösung: Die Matix A läßt sich aufteilen in eine Diagonalmatrix und den Rest:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

Für die Matrix N gilt $N^k = 0$ für alle $k \geq n$. (Matrizen, deren Potenzierung irgendwann die Nullmatrix ergibt, heißen *nilpotent*.) Weiter gilt

$$DN = \lambda IN = \lambda NI = ND,$$

weshalb D und N kommutieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
e^A &= e^{D+N} = \underbrace{e^D}_{=e^\lambda I} e^N = e^\lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{N^i}{i!} \\
&= e^\lambda \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3!} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H18 (Der freie gedämpfte lineare Oszillator) (8 Punkte)

Die Bewegungsgleichung des freien gedämpften linearen Oszillators lautet

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0,$$

wobei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $m, \alpha, k > 0$ reelle Konstanten sind. Es soll der aperiodische Grenzfall betrachtet werden, das heißt $\alpha = 2\sqrt{km}$. Setzt man $v := \dot{x}$, erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{k}{m}} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems, das heißt berechne

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

für beliebige Anfangswerte $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und zur beliebigen Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: Um e^{At} zu berechnen, muß eine Jordannormalform von A und eine zugehörige Jordanbasis berechnet werden. Zunächst sind die Eigenwerte von A zu bestimmen. Es gelte $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Für das charakteristische Polynom gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2\beta - \lambda & -\beta^2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(2\beta + \lambda) + \beta^2 = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2 = (\lambda + \beta)^2.$$

Folglich ist $-\beta$ der einzige Eigenwert von A. Der zugehörige Eigenraum ist

$$\ker(A+\beta I) = \ker\begin{pmatrix} -\beta & -\beta^2 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = \left\{ s\begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da die Dimension des Eigenraums nur eins ist, ist A nicht diagonalisierbar. Deshalb bestimmen wir eine Jordannormalform von A. Sei $v_1 = (-\beta, 1)^T$ der erste Vektor der Jordanbasis. Dann ist zur Bestimmung der Jordanbasis das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(A+\beta I)v_2 = \begin{pmatrix} -\beta & -\beta^2 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$$

Offensichtlich ist $v_2 = (1,0)^T$ eine Lösung. Daher ist

$$J = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

eine Jordannormalform von A und (v_1, v_2) eine zugehörige Jordanbasis. Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die zugehörige Transformationsmatrix. Es ist noch deren Inverse zu bestimmen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -\beta & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II+\beta I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta \end{array}\right)$$

Daraus folgt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Nach Aufgabe H17 gilt damit für die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} &= e^{At}\begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = Te^{Jt}T^{-1}\begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\beta t} & t \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\beta t} & te^{-\beta t} \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 + \beta x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-\beta t}\begin{pmatrix} x_0 + t(v_0 + \beta x_0) \\ v_0 + \beta x_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{-\beta t}\begin{pmatrix} -\beta(x_0 + t(v_0 + \beta x_0)) + v_0 + \beta x_0 \\ x_0 + t(v_0 + \beta x_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$